BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR6264
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 08/25/00 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B54998
035/2: : |a (CaOTULAS)160127593
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Planck, Max, |d 1858-1947.
245:00: |a Einführung in die mechanik deformierbarer Körper; |b zum gebrauch bei vorträgen, sowie zum selbstunterricht, |c von Dr. Max Planck mit 12 Figuren.
260: : |a Leipzig, |b S. Hirzel, |c 1919.
300/1: : |a 3 p. L., 193, p. |b diagrs. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Deformations (Mechanics)
650/2: 0: |a Dynamics
998/1: : |c RSH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Einführung

in die

Mechanik deformierbarer Körper

Zum Gebrauch bei Vorträgen,
sowie zum Selbstunterricht

Von

Dr. Max Planck

Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin

Mit 12 Figuren

Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1919.

Copyright by S. Hirzel at Leipzig 1919.

Druck von August Pries in Leipzig.

Vorwort.

Für die Aufgabe, die ich mir bei der Abfassung des vorliegenden Lehrbuches gestellt habe, sowie für den zu ihrer Lösung eingeschlagenen Weg gilt im wesentlichen dasselbe, was ich in dem Vorwort zu der im nämlichen Verlage erschienenen Einführung in die Allgemeine Mechanik darzulegen suchte. Das Büchlein möchte dem Leser dadurch, daß sich vor ihm die Mechanik deformierbarer Körper als eine natürliche, durch innere Notwendigkeit bedingte Fortentwicklung der allgemeinen Mechanik aufbaut, vor allem eine zusammenhängende, gründliche Begriffsbildung verschaffen, und ihn dadurch in den Stand setzen, die ausführlicheren Lehrbücher sowie die Fachliteratur nicht nur mit vollem Verständnis zu studieren, sondern auch gegebenenfalls durch selbständige tiefer dringende Untersuchungen zu ergänzen.

Durch gelegentliche Bezugnahme auf den Inhalt der in meinem vorgenannten Buche abgeleiteten Sätze und Gleichungen ließ sich die Darstellung öfter wesentlich abkürzen und vereinfachen. Derartige Hinweise sind mit der Ziffer I bezeichnet. So bedeutet I. (155) die Gleichung (155), I. § 49 den § 49 der Allgemeinen Mechanik. Auch durch Fortlassung von Formeln oder von Zwischenrechnungen, die sich jeder mathematisch Gebildete ohne weiteres ergänzen kann, ließ sich oft erheblich Raum sparen.

Am Schluß befindet sich auch hier wieder ein alphabetisches Verzeichnis aller benutzten Definitionen und der wichtigsten entwickelten Sätze zusammengestellt, welches beim Nachschlagen vielleicht gute Dienste leisten kann.

Berlin-Grunewald, Februar 1919.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

Erster Teil. Allgemeine Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers 3

Erstes Kapitel. Kinematische Gesetze 3

Zweites Kapitel. Dynamische Gesetze 25

Zweiter Teil. Unendlich kleine Deformationen 38

Erstes Kapitel. Feste Körper. Allgemeines 38

Zweites Kapitel. Gleichgewichtszustände fester Körper 55

Drittes Kapitel. Schwingungsvorgänge in festen Körpern 65

Viertes Kapitel. Schwingungsvorgänge in Flüssigkeiten und Gasen 100

Dritter Teil. Endliche Deformationen 118

Erstes Kapitel. Allgemeines 118

Zweites Kapitel. Wirbelfreie Bewegungen 139

Drittes Kapitel. Wirbelbewegungen 168

Viertes Kapitel. Reibung 178

Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper.

§ 1. Ein deformierbarer Körper, im Gegensatz zu einem starren Körper, ist ein solcher, der entweder als Ganzes oder in irgendeinem seiner Teile einer Formänderung fähig ist. In der Natur sind streng genommen alle Körper deformierbar; denn es gibt überhaupt keine Bewegungen, die nicht mit größeren oder kleineren Formänderungen oder Deformationen der daran beteiligten Körper verbunden wären. Aber in vielen Fällen, z. B. beim Pendel, beim Hebel, beim Kreisel, genügt es für eine erste Annäherung an die Wirklichkeit, die betreffenden Körper als starr vorauszusetzen. Mit den Bewegungen starrer Körper beschäftigt sich die allgemeine Mechanik. Dagegen werden wir es hier mit solchen Bewegungen zu tun haben, für deren Eigentümlichkeiten gerade die Deformationen von charakteristischer Bedeutung sind; daher müssen wir jetzt unsere Voraussetzungen über die Beschaffenheit der materiellen Körper um einen Grad verfeinern, und tun dies, indem wir als erste Voraussetzung überall die Annahme zugrunde legen, daß der Raum, den ein Körper einnimmt, von der Materie stetig erfüllt wird. Freilich ist auch diese Voraussetzung, ebenso wie die der Starrheit, nur eine ideale Abstraktion, und in der Natur niemals streng erfüllt, da genau genommen alle Körper eine atomistische Struktur besitzen. Aber für eine erste Annäherung an die Wirklichkeit kommt man auch hier mit einer vereinfachenden Annahme vollkommen aus. Denn ebenso, wie es für die Aufstellung der elementaren Hebelgesetze überflüssig und unzweckmäßig wäre, die tatsächlich stets eintretende elastische Durchbiegung des Hebels mit in Betracht zu ziehen, würde man bei der Untersuchung der Grundgesetze der Schallwellen oder der Flüssigkeitsströmungen ungeschickt verfahren, wenn man gleich von vornherein auf die Molekeln oder gar auf die unveränderlichen Atome der betreffenden Körper zurückgehen wollte, zumal auch die letzteren sicherlich wiederum nur eine ideale Abstraktion darstellen. Absolut läßt

sich die Natur eben überhaupt nicht in menschlichen Gedanken erschöpfen.

Es ist die wichtigste, zugleich aber auch die schwierigste Aufgabe des theoretischen Physikers, bei der mathematischen Formulierung eines von ihm in Angriff genommenen Problems gerade diejenigen vereinfachenden Annahmen einzuführen, welche für die ihn interessierenden Eigenschaften des untersuchten physikalischen Vorgangs von charakteristischer Bedeutung sind, und alle Einflüsse von kleinerer Größenordnung zu vernachlässigen, welche an dem Hauptresultat nichts Wesentliches ändern und nur als mathematischer Ballast in die Betrachtungen eingehen. Wichtig und unumgänglich zu fordern ist nur, daß die für verschiedenartige Probleme eingeführten verschiedenartigen Hypothesen miteinander verträglich sind. Denn sonst würde das physikalische Weltbild seine Einheitlichkeit verlieren und man erhielte auf eine bestimmte Frage unter Umständen zwei einander widersprechende Antworten.

Für unseren vorliegenden Zweck wird es sich am meisten empfehlen, den ganzen Stoff in drei gesonderten Teilen zu behandeln, deren erster die Ableitung der allgemeinen Bewegungsgesetze stetig ausgedehnter Körper enthält, ganz ohne Rücksicht auf ihren Aggregatzustand, während im zweiten und dritten Teil Anwendungen auf die wichtigsten Arten von Bewegungen gemacht werden, je nachdem sie mit unendlich kleinen oder mit endlichen Deformationen verbunden sind.

Erster Teil.

Allgemeine Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers.

Erstes Kapitel. Kinematische Gesetze.

§ 2. Wie in der allgemeinen Mechanik materieller Punkte und starrer Körper betrachten wir auch hier, wo es sich um deformierbare Körper handelt, zunächst die Eigenschaften der Bewegungen an sich, ohne nach den Ursachen derselben zu fragen, und suchen vor allem nach ihrer erschöpfenden mathematischen Darstellung. Eine Bewegung eines materiellen Körpers ist immer dann und nur dann vollkommen bestimmt, wenn die Bewegungen aller materiellen Punkte, aus denen er zusammengesetzt gedacht werden kann, bekannt sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Lage eines jeden dieser materiellen Punkte als Funktion der Zeit gegeben ist. Um nun einen bestimmten materiellen Punkt des Körpers zu charakterisieren, wollen wir den Zustand des Körpers zur Zeit $t = 0$ ins Auge fassen und in diesem bestimmten Zustand einem jeden materiellen Punkt des Körpers seine drei Koordinaten a, b, c, bezogen auf ein ruhendes rechtwinkliges rechtshändiges (I. § 16) Koordinatensystem, zuordnen. Diese drei Größen a, b, c sollen dann auch für die folgenden Zeiten t, wenn die Koordinaten des materiellen Punktes aus a, b, c in x, y, z übergehen, zu seiner Charakterisierung dienen, sie bilden gewissermaßen den Namen, den er trägt, und mit dessen Hilfe er zu jeder Zeit wieder aufgefunden werden kann. Die ganze Bewegung des Körpers ist dann in allen Einzelheiten bestimmt, wenn für jeden der materiellen Punkte a, b, c, aus denen der Körper besteht, x, y, z als Funktionen von t gegeben sind, d. h. wenn:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(a, b, c, t), \\ y &= \varphi(a, b, c, t), \\ z &= \psi(a, b, c, t), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo f, φ, ψ gewisse eindeutige und endliche Funktionen von a, b, c, t bedeuten. Wir nehmen sie auch als stetig an, indem wir voraussetzen, daß der Körper im Verlauf seiner Bewegung nicht in getrennte Stücke zerfällt. Nach der oben getroffenen Festsetzung ist für $t = 0$

(1a) $$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Bei der Fülle der in (1) enthaltenen Möglichkeiten empfiehlt es sich, zunächst eine ganz bestimmte Zeit t ins Auge zu fassen, oder mit anderen Worten sich zu beschränken auf die Betrachtung der Veränderung, welche mit dem Körper von der Zeit 0 bis zur Zeit t vor sich geht, wo t irgendeinen konstanten Wert besitzt. Dann können wir t aus den Ausdrücken (1) ganz fortlassen und erhalten einfacher:

(2) $$\left\{\begin{aligned} x &= f(a, b, c), \\ y &= \varphi(a, b, c), \\ z &= \psi(a, b, c). \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen bedeuten den Übergang des Körpers aus einer bestimmten „Anfangslage“ in eine bestimmte „Endlage“, wobei der materielle Punkt (a, b, c) den Ort (a, b, c) mit dem Ort (x, y, z) vertauscht, weshalb die Größen

(3) $$x - a = u, \quad y - b = v, \quad z - c = w$$

die Komponenten seiner „Verschiebung“ genannt werden.

Löst man die Gleichungen (2) nach a, b, c auf, so erhält man a, b, c als gewisse Funktionen von x, y, z, deren Werte die Antwort auf die Frage liefern, an welchem Ort sich derjenige materielle Punkt vor der Veränderung befunden hat, der nach der Veränderung die Koordinaten x, y, z besitzt. Wir setzen diese Funktionen, welche sich als die der betrachteten Veränderung entgegengesetzte Veränderung deuten lassen, ebenfalls als eindeutig, endlich und stetig voraus.

§ 3. Als Beispiel untersuchen wir zunächst den allgemeinen Fall einer lineären Veränderung:

(4) $$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{aligned}\right.$$

Die Bezeichnungen der Konstanten sind so gewählt, daß die Buchstaben λ, μ, ν den x, y, z, die Ziffern 1, 2, 3 den a, b, c entsprechen. Die Größen λ_0, μ_0, ν_0 ergeben die Verschiebung des-

jenigen materiellen Punktes, welcher vor der Veränderung sich im Koordinatenanfangspunkt befand.

Nach a, b, c aufgelöst lauten die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} a &= \lambda_1'(x-\lambda_0) + \mu_1'(y-\mu_0) + \nu_1'(z-\nu_0), \\ b &= \lambda_2'(x-\lambda_0) + \mu_2'(y-\mu_0) + \nu_2'(z-\nu_0), \\ c &= \lambda_3'(x-\lambda_0) + \mu_3'(y-\mu_0) + \nu_3'(z-\nu_0), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wobei

$$\lambda_1' = \frac{[\lambda_1]}{D}, \quad \text{usw.}, \quad (6)$$

wenn zur Abkürzung die sogenannte Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = D \quad (7)$$

und der Koeffizient eines Elementes λ_1 in dem Ausdrucke dieser Determinante:

$$\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1], \quad \text{usw.} \quad (8)$$

gesetzt wird.

Da wir alle Konstanten, sowohl die ungestrichenen als auch die gestrichenen, als endlich voraussetzen, so kann die Funktionaldeterminante D nicht gleich Null sein, und daraus läßt sich weiter sogleich das Vorzeichen von D ableiten. Denn die Veränderung entsteht ja nicht plötzlich, sondern allmählich in einer endlichen Zeit t. Also sind die Konstanten λ, μ, ν der Veränderung, und mit ihnen die Determinante D, als stetige Funktionen von t zu betrachten. Nun ist vor der Veränderung, für $t = 0$,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \text{usw.}, \quad (9)$$

mithin $D = 1$. Daher ändert sich im Laufe der Zeit die Determinante D, vom Werte 1 ausgehend, stetig, ohne jemals Null zu werden, und daraus folgt, daß D stets positiv ist:

$$D > 0. \quad (10)$$

§ 4. Ein spezieller Fall einer linearen Veränderung ist eine Translation (I. § 102), bei der alle materiellen Punkte des Körpers gleichgerichtete und gleiche, im übrigen beliebig große Verschiebungen erleiden. Denn hierfür ist nach (3):

$$x - a = \text{const.}, \quad y - b = \text{const.}, \quad z - c = \text{const.},$$

also ein Spezialfall von (4).

Ein anderer spezieller Fall einer linearen Veränderung ist eine Rotation (I. § 101) um irgendeine Achse, mit beliebig großem

Drehungswinkel. Wir wollen, um dies zu beweisen die Gleichungen für eine beliebige endliche Rotation aufstellen. Zu dem Zwecke denken wir uns außer dem im Raume festen Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt wir in die Drehungsachse legen, ein zweites, im Körper festliegendes, also im Raume bewegliches Koordinatensystem, und wählen das letztere so, daß vor der Veränderung die entsprechenden Achsen der beiden Systeme zusammenfallen. Dann bilden nach der Veränderung je zwei Achsen der beiden Systeme gewisse Winkel miteinander, deren cos wir mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bezeichnen wollen, wobei die Buchstaben α, β, γ sich auf die Achsen des ersten, die Ziffern 1, 2, 3 sich auf die Achsen des zweiten Systems beziehen mögen.

Nun besitzt irgendein materieller Punkt des Körpers vor der Veränderung in bezug auf jedes der beiden Systeme die Koordinaten a, b, c. Nach der Veränderung dagegen besitzt dieser nämliche materielle Punkt in bezug auf das erste System die Koordinaten x, y, z, in bezug auf das zweite System aber immer noch die Koordinaten a, b, c. Folglich ist der Zusammenhang zwischen x, y, z und a, b, c der nämliche wie derjenige für die Transformation der Koordinaten eines Raumpunktes von einem Koordinatensystem auf ein anderes, durch die neun angegebenen Richtungscos charakterisiertes System, oder nach (I. (329)):

$$(11)\quad \begin{cases} x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z = \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c, \end{cases}$$

wiederum ein Spezialfall von (4).

Fügt man der Rotation (11) noch eine Translation mit den Verschiebungskomponenten λ_0, μ_0, ν_0 hinzu, so erhält man die allgemeinste Veränderung, die ein starrer Körper überhaupt erleiden kann, und die durch die Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} x = \lambda_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y = \mu_0 + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z = \nu_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c \end{cases}$$

ausgedrückt wird. Aber auch diese Veränderung bildet immer noch einen Spezialfall der allgemeinen lineären Veränderung (4), da die 12 Konstanten, welche sie charakterisieren, nicht voneinander unabhängig sind. Fragt man also, unter welcher Bedingung eine lineäre Veränderung (4) eines Körpers von keinerlei Deformation

desselben begleitet ist, so lautet die Antwort dahin, daß zwischen den Koeffizienten λ, μ, ν der Veränderung diejenigen Relationen erfüllt sein müssen, welche zwischen den entsprechenden Koeffizienten von (12) gelten. Das sind nach (I. (331) und (332)) im ganzen sechs Relationen, nämlich drei von der Form:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \text{ usw.} \tag{13}$$

und drei von der Form:

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0, \text{ usw.} \tag{14}$$

In diesen sind zugleich eine Reihe von weiteren Relationen enthalten, wie z. B. diejenigen sechs, welche aus (13) und (14) durch Vertauschung der Buchstaben α, β, γ mit den Ziffern 1, 2, 3 entstehen (I. (333) und (334)), ferner die Beziehung (I. (461))

$$D = 1 \tag{15}$$

und die neun Relationen (I. (462)) von der Form:

$$\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1] = \lambda_1', \text{ usw.} \tag{16}$$

Dadurch nehmen dann in den Gleichungen (5) für die umgekehrte Veränderung die mit Strichen bezeichneten Koeffizienten die gleichbezeichneten ungestrichenen Werte an.

§ 5. Wir kehren nun zum allgemeinen Fall einer linearen Veränderung zurück und stellen einige Eigenschaften derselben zusammen. Zunächst ist leicht zu zeigen, daß alle materiellen Punkte, welche vor der Veränderung in einer Ebene liegen, dies auch nach der Veränderung tun. Denn die materiellen Punkte (a, b, c), welche in einer Ebene liegen, genügen einer linearen Gleichung:

$$Aa + Bb + Cc + D = 0. \tag{17}$$

Nach der Veränderung wird die Lage eines jeden dieser Punkte durch die aus (4) folgenden Werte von x, y, z angegeben. Wenn also die a, b, c die Gleichung (17) befriedigen, so erfüllen die x, y, z eine Bedingung, die durch Elimination von a, b, c, am bequemsten durch Substitution der Werte (5) in (17), erhalten wird. Dies ist aber wiederum eine lineare Gleichung. Folglich liegen auch die Punkte (x, y, z) in einer Ebene.

Aus dem Satz der Erhaltung der Ebenen folgt ohne weiteres der Satz der Erhaltung der Geraden, da eine Gerade durch den Schnitt zweier Ebenen bestimmt wird, sowie der Satz der Erhaltung der Ordnungszahl irgendeiner Fläche, da die Ordnungs-

zahl einer Fläche durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmt wird.

Auch der Parallelismus bleibt bei einer linearen Veränderung bestehen. Denn wenn zwei materielle Ebenen, welche vor der Veränderung einander parallel sind, nach der Veränderung nicht mehr parallel wären, so müßte die dann auftretende im Endlichen liegende Schnittlinie derselben von solchen materiellen Punkten (a, b, c) gebildet werden, die vor der Veränderung im Unendlichen lagen, für die also bei endlichen x, y, z a, b, c, wenigstens zum Teil, unendlich sind. Das ist aber nach den Gleichungen (5) ausgeschlossen.

Aus der Kombination der Erhaltung der Ebenen und der Erhaltung des Parallelismus folgt, daß auch alle Parallelepipede erhalten bleiben. Aber wohl können sich die Winkel und die Volumina ändern. Berechnen wir jetzt die Volumenänderung irgendeines aus dem Körper ausgeschnittenen Parallelepipeds, welches durch die vier beliebig gewählten Eckpunkte $a_1, b_1, c_1, \cdots a_4, b_4, c_4$ charakterisiert sein möge. Vor der Veränderung ist das Volumen dieses Parallelepipeds:

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

nach der Veränderung dagegen:

$$V' = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

wo die x, y, z mit den gleichbezifferten a, b, c durch die Gleichungen (4) verknüpft sind.

Die Beziehung zwischen V und V' ergibt sich am einfachsten, wenn wir die Determinante (18) multiplizieren mit der Funktionaldeterminante (7), welche folgendermaßen als Determinante vierter Ordnung geschrieben werden kann:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D. \tag{20}$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ist das Produkt der Determinanten (18) und (20) wiederum eine Determinante vierter Ordnung, deren einzelne Glieder erhalten werden, wenn man je eine Zeile der einen Determinante mit je einer Zeile der anderen Determinante kombiniert, in der Weise, daß die gleichstelligen Glieder der beiden Zeilen miteinander multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert werden. Daher lautet in der resultierenden Determinante das erste Glied der ersten Zeile:

$$a_1 \cdot \lambda_1 + b_1 \cdot \lambda_2 + c_1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_0;$$

das zweite Glied der ersten Zeile:

$$a_1 \cdot \mu_1 + b_1 \cdot \mu_2 + c_1 \cdot \mu_3 + 1 \cdot \mu_0;$$

das vierte Glied der ersten Zeile:

$$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + 1 \cdot 1, \text{ usw.}$$

und die ganze Determinante erhält mit Rücksicht auf (4) genau die nämliche Form wie die Determinante (19). Wir haben mithin:

$$V \cdot D = V', \tag{21}$$

indem wir beachten, daß die Größen V, V' und D alle drei positiv sind.

Da diese Beziehung unabhängig von der Größe und von der Form des ins Auge gefaßten Parallelepipeds, insbesondere also auch für unendlich kleine Parallelepipede gilt, so dürfen wir ohne weiteres die Gleichung (21) auf jedes beliebige aus dem Körper ausgeschnittene Volumen verallgemeinern und gelangen so zu dem Satze: Bei einer linearen Veränderung ändern sich die Volumina aller Teile des Körpers gleichmäßig, und zwar ist das Verhältnis des Volumens irgendeines Körperteils nach der Veränderung zu seinem Volumen vor der Veränderung gleich der Funktionaldeterminante. Damit stimmt überein, daß nach (15) für jede Veränderung eines starren Körpers die Funktionaldeterminante $= 1$ ist.

Als „Dilatation" des Volumens bezeichnet man das Verhältnis der Volumenänderung zu dem ursprünglichen Volumen. Daher ist die Volumendilatation bei einer linearen Veränderung:

$$\frac{V' - V}{V} = D - 1, \tag{22}$$

positiv oder negativ, je nachdem Ausdehnung oder Kontraktion eintritt.

§ 6. Wenn man einen Körper zwei oder mehreren linearen Veränderungen nacheinander unterwirft, so stellt die resultierende

Veränderung abermals eine lineäre Veränderung vor. Dies ergibt sich sogleich, wenn man den Zusammenhang der Koordinaten irgendeines materiellen Punktes nach Ausführung der letzten Veränderung mit seinen anfänglichen Koordinaten (a, b, c) beachtet. Wenn der Punkt durch die erste Veränderung an den Ort (x, y, z), durch die zweite an den Ort (x', y', z'), usw., durch die letzte an den Ort (x^*, y^*, z^*) gelangt, so gewinnt man die Beziehungen zwischen a, b, c und x^*, y^*, z^* durch Elimination der Zwischenkoordinaten, und das sind offenbar wiederum lineäre Gleichungen.

Umgekehrt läßt sich jede lineäre Veränderung zerlegen in mehrere nacheinander ausgeführte lineäre Veränderungen, wobei aber natürlich die Reihenfolge derselben für ihre Bedeutung im allgemeinen nicht gleichgültig ist, und es liegt nahe, diese Zerlegung so vorzunehmen, daß der Charakter der Einzelveränderungen ein möglichst einfacher und physikalisch anschaulicher ist. Denn auf diese Weise wird es gelingen, den allgemeinen Fall (4) einer lineären Veränderung auf eine Anzahl einfacherer leicht übersichtlicher Veränderungen zurückzuführen und damit zugleich auch die Bedeutung der Konstanten λ, μ, ν der Veränderung klarzustellen.

Der erste Schritt auf dem geschilderten Wege ist, daß wir die Veränderung (4) zurückführen auf eine andere, bei der der materielle Punkt $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ seine Lage beibehält. Das geschieht einfach, indem wir dem Körper eine Translation mit den Komponenten λ_0, μ_0, ν_0 erteilen und dadurch jenen Punkt in seine Endlage bringen. Dann bleibt noch übrig eine sogenannte „homogene Veränderung", deren allgemeine Form ist:

$$(23)\quad \begin{cases} x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z = \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{cases}$$

Mit dieser wollen wir uns jetzt näher beschäftigen.

Fassen wir einmal alle diejenigen materiellen Punkte ins Auge, welche vor der Veränderung auf einer um den Koordinatenanfangspunkt als Zentrum mit dem beliebigen Radius R beschriebenen Kugelfläche liegen, für die also

$$(24)\quad a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

Nach der Veränderung liegen diese Punkte, gemäß § 5, auf einer gewissen Fläche zweiter Ordnung, und zwar, da kein Punkt ins Unendliche rückt, auf einem Ellipsoid, mit dem Anfangspunkt

als Zentrum, wie man direkt erkennt, wenn man in (24) die Größen a, b, c vermittelst (23) durch x, y, z ersetzt. Diejenigen materiellen Geraden, welche vor der Veränderung mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, werden nach der Veränderung im allgemeinen nicht mehr aufeinander senkrecht stehen. Wohl aber kann man behaupten, daß sie nach der Veränderung ein Tripel konjugierter Durchmesser in bezug auf das Ellipsoid bilden, d. h. daß die am Endpunkt jedes Durchmessers zum Ellipsoid gelegte Tangentialebene parallel ist der durch die beiden anderen Durchmesser gelegten Ebene. Denn erstens bilden die drei Koordinatenachsen, wie überhaupt irgend drei aufeinander senkrechte Gerade, ein Tripel konjugierter Durchmesser in bezug auf die Kugel, und zweitens gehört die Eigenschaft, ein konjugiertes Tripel zu bilden, zu denjenigen Eigenschaften, welche durch eine lineäre Veränderung nicht aufgehoben werden, da sowohl die Tangentialebene als auch der Parallelismus erhalten bleibt.

Nun gibt es unter allen zum Ellipsoid konjugierten Durchmessertripeln ein ganz bestimmtes, welches lauter rechte Winkel bildet, das sind die Achsen des Ellipsoids, und daraus folgt, daß diejenigen drei materiellen Geraden, welche nach der Veränderung mit den Achsen des Ellipsoids zusammenfallen, auch vor der Veränderung aufeinander senkrecht stehen, da sie ja dann in bezug auf die Kugel konjugiert sind. Mit anderen Worten: es gibt drei bestimmte materielle Gerade, welche sowohl vor der Veränderung als auch nach der Veränderung aufeinander senkrecht stehen.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich eine jede homogene lineäre Veränderung zerlegen in eine einfache Drehung um den Koordinatenanfangspunkt, welche so eingerichtet ist, daß sie die drei genannten Geraden in ihre neuen Richtungen bringt, und außerdem in eine gewisse lineäre Veränderung, welche die Eigenschaft besitzt, daß drei aufeinander senkrechte Gerade ihre Richtungen behalten; diese Veränderung nennen wir eine Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen.

§ 7. Um die Eigentümlichkeiten einer Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen näher zu studieren, legen wir die Koordinatenachsen in diese drei Richtungen, die sogenannten „Dilatationsachsen", und bestimmen die Vereinfachung, welche die allgemeinen Gleichungen (23) einer homogenen lineären Veränderung unter den gemachten Voraussetzungen erfahren. Wenn die Richtung der x-Achse erhalten bleiben soll, so muß für $b = 0$

und $c = 0$ auch $y = 0$ und $z = 0$ sein, also $\mu_1 = 0$ und $\nu_1 = 0$, und Entsprechendes gilt für die beiden anderen Achsen. Daher erhalten wir als allgemeinen Ausdruck für eine Dilatation nach den drei Koordinatenachsen die Gleichungen:

$$x = \lambda_1 a, \quad y = \mu_2 b, \quad z = \nu_3 c. \tag{25}$$

Die Funktionaldeterminante ist nach (7) und (10)

$$D = \lambda_1 \mu_2 \nu_3 > 0, \tag{26}$$

und zwar ist jeder einzelne der drei Koeffizienten positiv, da die Koordinatenachsen ihre Richtungen nicht ins Entgegengesetzte verkehren.

Die Koordinatenachsen sind aber auch, wenigstens im allgemeinen Fall, die einzigen Richtungen, welche von der Veränderung nicht betroffen werden. Denn die materiellen Punkte, welche vor der Veränderung auf einer Geraden mit den Richtungsverhältnissen $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$ liegen, werden nach der Veränderung eine Gerade mit den Richtungsverhältnissen $x : y : z = \lambda_1 \alpha : \mu_2 \beta : \nu_3 \gamma$ bilden.

Während die Volumendilatation nach (22) durch

$$D - 1 = \lambda_1 \mu_2 \nu_3 - 1 \tag{27}$$

gegeben wird, erhalten wir die Dilatation einer Geraden, wenn wir die Veränderung des Abstandes zweier Punkte dieser Geraden dividieren durch ihren ursprünglichen Abstand. So sind die Dilatationen der drei Achsen:

$$\frac{x-a}{a} = \lambda_1 - 1, \quad \frac{y-b}{b} = \mu_2 - 1, \quad \frac{z-c}{c} = \nu_3 - 1, \tag{28}$$

sie werden gewöhnlich als „Hauptdilatationen“ bezeichnet und erteilen den drei Koeffizienten der Veränderung eine anschauliche physikalische Bedeutung.

In dem speziellen Fall $\lambda_1 = \mu_2 = \nu_3$ werden die drei Hauptdilatationen einander gleich, positiv oder negativ, alle Geraden behalten ihre Richtungen, die Dilatationsachsen werden unbestimmt, und der Körper erleidet eine allseitig gleichmäßige Ausdehnung oder Kontraktion, wobei jeder seiner Teile sich ähnlich bleibt.

§ 8. Nachdem wir gesehen haben, daß sich jede lineäre Veränderung hervorgebracht denken läßt durch eine Translation, eine Rotation und eine Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen, obliegt uns nun die Aufgabe, für eine bestimmte durch die Gleichungen (4) gegebene Veränderung diese einzelnen Operationen wirklich abzuleiten, oder mit anderen Worten, aus den

gegebenen Koeffizienten λ, μ, ν die entsprechenden Einzelveränderungen zu berechnen. Zu diesem Zwecke wollen wir uns zunächst vergewissern, daß zur Berechnung aller gesuchten Größen gerade soviel Gleichungen zur Verfügung stehen als Unbekannte vorhanden sind. In der Tat enthalten die Gleichungen (4) 12 voneinander unabhängige Konstanten λ, μ, ν, die wir als gegeben betrachten, und ebenso groß ist auch die Zahl der für die Einzelveränderungen charakteristischen Größen, nämlich drei für die Translation, drei für die Rotation und sechs für die Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen, da drei Größen zur Bestimmung der Richtungen der Dilatationsachsen und drei andere Größen zur Bestimmung der Hauptdilatationen erforderlich sind.

Als Komponenten der Translation erhalten wir, wie sich schon in § 6 ergab, einfach die Werte λ_0, μ_0, ν_0, nach deren Abspaltung die Gleichungen (23) für eine homogene Veränderung übrig bleiben. Um nun die neun Koeffizienten derselben mit den Merkmalen der Rotation und der Dilatation in Zusammenhang zu bringen, denken wir uns mit dem Körper zuerst eine Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen, sodann eine Drehung um den Koordinatenanfangspunkt vollzogen, und berechnen die Lagenänderung, die ein bestimmter materieller Punkt (a, b, c) dadurch im ganzen erleidet. Die Richtungen der drei Dilatationsachsen, die natürlich im allgemeinen nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, seien durch die neun Richtungscos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bezeichnet, die Konstanten der Dilatation dagegen durch l_0, m_0, n_0, da die Buchstaben λ, μ, ν in (23) schon in anderer Bedeutung vorkommen. Um die Gleichungen (25) für die Dilatation hier anwenden zu können, beziehen wir zunächst den materiellen Punkt (a, b, c) auf die Dilatationsachsen als Koordinatenachsen, wodurch seine Koordinaten werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c &= \xi, \\ \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c &= \eta, \\ \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c &= \zeta. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Dann nehmen wir die Dilatation vor und erhalten aus (25) als Koordinaten desselben materiellen Punktes nach der Veränderung in bezug auf die Dilatationsachsen:

$$\xi' = l_0 \xi, \quad \eta' = m_0 \eta, \quad \zeta' = n_0 \zeta. \quad (30)$$

Wenn nun weiter die Drehung erfolgt, so mögen dadurch die Dilatationsachsen aus ihren durch die α, β, γ bezeichneten Rich-

tungen in gewisse andere Richtungen gelangen, denen die Richtungscos $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \alpha_2', \beta_2', \gamma_2', \alpha_3', \beta_3', \gamma_3'$ entsprechen. Dann besitzt unser materieller Punkt nach Ausführung der Drehung in bezug auf die drei Richtungen $(\alpha', \beta', \gamma')$ die Koordinaten ξ', η', ζ', da sich seine Lage in bezug auf die Dilatationsachsen durch die Drehung nicht geändert hat. In bezug auf das ursprüngliche, im Raume ruhende Koordinatensystem besitzt er aber dann die Koordinaten x, y, z, weil mit der Ausführung der Drehung die gesamte Veränderung des Körpers vollzogen ist. Also haben wir:

$$(31)\quad \begin{cases} x = \alpha_1'\xi' + \alpha_2'\eta' + \alpha_3'\zeta', \\ y = \beta_1'\xi' + \beta_2'\eta' + \beta_3'\zeta', \\ z = \gamma_1'\xi' + \gamma_2'\eta' + \gamma_3'\zeta'. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist der Ring geschlossen und die Koordinaten x, y, z auf die Koordinaten a, b, c zurückgeführt. Man braucht darin nur ξ', η', ζ' nach (30) durch ξ, η, ζ und diese nach (29) durch a, b, c auszudrücken. Tut man dies und identifiziert die so erhaltenen drei Gleichungen vollständig mit den allgemeinen Gleichungen (23) einer lineären homogenen Veränderung, so erhält man die folgenden neun Beziehungen:

$$(32)\quad \begin{cases} l_0\alpha_1\alpha_1' + m_0\alpha_2\alpha_2' + n_0\alpha_3\alpha_3' = \lambda_1, \\ l_0\beta_1\alpha_1' + m_0\beta_2\alpha_2' + n_0\beta_3\alpha_3' = \lambda_2, \\ l_0\gamma_1\alpha_1' + m_0\gamma_2\alpha_2' + n_0\gamma_3\alpha_3' = \lambda_3, \\ l_0\alpha_1\beta_1' + m_0\alpha_2\beta_2' + n_0\alpha_3\beta_3' = \mu_1, \\ l_0\beta_1\beta_1' + m_0\beta_2\beta_2' + n_0\beta_3\beta_3' = \mu_2, \\ l_0\gamma_1\beta_1' + m_0\gamma_2\beta_2' + n_0\gamma_3\beta_3' = \mu_3, \\ l_0\alpha_1\gamma_1' + m_0\alpha_2\gamma_2' + n_0\alpha_3\gamma_3' = \nu_1, \\ l_0\beta_1\gamma_1' + m_0\beta_2\gamma_2' + n_0\beta_3\gamma_3' = \nu_2, \\ l_0\gamma_1\gamma_1' + m_0\gamma_2\gamma_2' + n_0\gamma_3\gamma_3' = \nu_3, \end{cases}$$

deren Bau leicht zu überschauen ist. Aus ihnen ergeben sich bei gegebenen λ, μ, ν die darin enthaltenen neun Unbekannten.

§ 9. Bei der Durchführung der Rechnung wollen wir uns auf den speziellen Fall beschränken, daß die lineäre Veränderung unendlich klein ist. Dieser Fall findet sich bei vielen Vorgängen, namentlich in festen Körpern, nahezu verwirklicht, er besitzt aber auch für endliche Veränderungen insofern stets eine gewisse Bedeutung, als eine endliche Veränderung in der Natur stets in endlicher Zeit erfolgt und daher in eine Reihe unendlich

kleiner Veränderungen zerfällt, die in den aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten vor sich gehen.

Um die Vereinfachungen, die bei einer unendlich kleinen Veränderung eintreten, bequem einzuführen, empfiehlt es sich, statt der endlichen Endkoordinaten x, y, z eines materiellen Punktes seine unendlich kleinen Verschiebungskomponenten (3) zu benutzen. Dann schreiben sich die Gleichungen (4) der Veränderung:

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda_0 + \lambda\, a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu\, b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu\, c. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\lambda_1 - 1 = \lambda, \quad \mu_2 - 1 = \mu, \quad \nu_3 - 1 = \nu. \quad (34)$$

Nun sind in (33) alle 12 Koeffizienten λ, μ, ν unendlich klein.

Andererseits sind natürlich auch die Hauptdilatationen (28) unendlich klein. Wir setzen daher ihre Werte:

$$l_0 - 1 = l, \quad m_0 - 1 = m, \quad n_0 - 1 = n. \quad (35)$$

Ferner erfahren die Richtungscos α, β, γ der Dilatationsachsen, deren Werte an sich im allgemeinen offenbar endlich sein werden, durch die Drehung nur unendlich kleine Änderungen, weshalb wir setzen können:

$$\alpha_1' = \alpha_1 + d\alpha_1, \quad \beta_1' = \beta_1 + d\beta_1, \quad \text{usw.}$$

Wenn wir alle diese Substitutionen in die Gleichungen (32) einführen und außerdem die allgemein gültigen Beziehungen (I. (333). (334)) zwischen den Richtungscos, sowie diejenigen (I. (335). (336)) zwischen ihren Differentialen beachten, so nehmen diese neun Gleichungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 &= \lambda, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 - \zeta &= \lambda_2, \\ l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 + \eta &= \lambda_3, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 + \zeta &= \mu_1, \\ l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 &= \mu, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 - \xi &= \mu_3, \\ l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 - \eta &= \nu_1, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 + \xi &= \nu_2, \\ l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 &= \nu, \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

wo ξ, η, ζ nach (I. § 101) die Komponenten derjenigen unendlich

kleinen Rotation bedeuten, welche die Dilatationsachsen aus den Richtungen (α, β, γ) in die Richtungen $(\alpha', \beta', \gamma')$ bringt. Ihre Werte ergeben sich unmittelbar als:

$$\xi = \frac{\nu_2 - \mu_3}{2}, \quad \eta = \frac{\lambda_3 - \nu_1}{2}, \quad \zeta = \frac{\mu_1 - \lambda_2}{2}, \tag{37}$$

während für die Größe und Richtung der Dilatation die sechs Gleichungen übrig bleiben:

$$\left\{\begin{aligned} l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 &= \lambda, \\ l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 &= \mu, \\ l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 &= \nu, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 &= \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}, \\ l\gamma_1\alpha_1 + m\gamma_2\alpha_2 + n\gamma_3\alpha_3 &= \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 &= \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Hiernach kann man unmittelbar aus einer Betrachtung des Bildes der Determinante D in (7) beurteilen, ob die Veränderung sich, abgesehen von der Translation, einfach auf eine Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen beschränkt, oder ob mit ihr auch eine Drehung verbunden ist. Wenn nämlich die Determinante symmetrisch ist, d. h. wenn bei gegenseitiger Vertauschung der Zeilen mit den Spalten sich ihr Bild nicht ändert, so sind ξ, η und ζ alle gleich Null und es findet keine Drehung statt. Es ist aber wohl zu bemerken, daß nur die Dilatationsachsen sich nicht drehen. Andere Geraden werden, wie wir im § 7 gesehen haben, auch im Falle einer reinen Dilatation des Körpers sehr wohl Änderungen ihrer Richtung erleiden.

Der entgegengesetzte Fall, daß die Veränderung sich, außer der Translation, auf eine Drehung beschränkt, ist dadurch charakterisiert, daß die Hauptdilatationen l, m, n verschwinden. Dann ist nach (38) und (37):

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

$$\nu_2 = -\mu_3 = \xi, \quad \lambda_3 = -\nu_1 = \eta, \quad \mu_1 = -\lambda_2 = \zeta,$$

und die Gleichungen (33) für die Verschiebungskomponenten gehen über in:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \lambda_0 - \zeta b + \eta c, \\ v &= \mu_0 + \zeta a - \xi c, \\ w &= \nu_0 - \eta a + \xi b, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

identisch mit den allgemeinen Ausdrücken (I. (348)) für die Verschiebungen der Punkte eines starren Körpers.

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe übrig, aus den Gleichungen (38) die Hauptdilatationen l, m, n und die Richtungscos (α, β, γ) zu berechnen. Hierzu benutzen wir wiederum die allgemeinen Relationen zwischen den Richtungscos, diesmal in der Form (I. (331). (332)). Mit ihrer Hilfe ergeben sich unmittelbar aus (38) die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\alpha_1 &+ \tfrac{\mu_1+\lambda_2}{2}\beta_1 + \tfrac{\lambda_3+\nu_1}{2}\gamma_1 = l\alpha_1, \\ \tfrac{\mu_1+\lambda_2}{2}\alpha_1 &+ \mu\beta_1 + \tfrac{\nu_2+\mu_3}{2}\gamma_1 = l\beta_1, \\ \tfrac{\lambda_3+\nu_1}{2}\alpha_1 &+ \tfrac{\nu_2+\mu_3}{2}\beta_1 + \nu\gamma_1 = l\gamma_1. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Diese drei Gleichungen sind lineär und homogen in bezug auf $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Da diese Größen unmöglich alle drei gleich Null sein können, so muß die Determinante der Gleichungen verschwinden, d. h. es ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda - l & \frac{\mu_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_3+\nu_1}{2} \\ \frac{\mu_1+\lambda_2}{2} & \mu - l & \frac{\nu_2+\mu_3}{2} \\ \frac{\lambda_3+\nu_1}{2} & \frac{\nu_2+\mu_3}{2} & \nu - l \end{vmatrix} = 0, \quad (41)$$

eine kubische Gleichung zur Berechnung von l. Da in den Koeffizienten dieser Gleichung die Ziffer 1 durch nichts ausgezeichnet ist, so folgt, daß die nämliche Gleichung auch für jede der beiden anderen Hauptdilatationen m und n gilt, oder mit anderen Worten, daß die drei Wurzeln dieser Gleichung eben die Werte von l, m, n darstellen und daher auch stets reell sind. Welche Wurzel man mit l, m oder n bezeichnen soll, bleibt natürlich unbestimmt, man könnte z. B. festsetzen, daß $l \geqq m \geqq n$, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Durch l, m, n sind dann nach (40) auch die dazugehörigen (α, β, γ) bis auf das gemeinschaftliche Vorzeichen, das ebenfalls unbestimmt bleibt, zu berechnen.

Für die Volumendilatation (22) ergibt sich bei einer unendlich kleinen Veränderung aus der Funktionaldeterminante (7) mit Rücksicht auf (34) und mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung der Wert:

$$D - 1 = \lambda + \mu + \nu. \quad (42)$$

Es tragen also nur die diagonalen Glieder der Determinante etwas zur Volumendilatation bei. Zu demselben Resultat gelangt man natürlich, wenn man bedenkt, daß für die Volumendilatation die Drehung nicht in Betracht kommt, daß folglich nach (27) und (35):

$$D - 1 = l_0 m_0 n_0 - 1 = l + m + n. \tag{43}$$

Dies ist die Summe der Wurzeln der in l kubischen Gleichung (41), also zugleich der Koeffizient von l^2 in dieser Gleichung:

$$l + m + n = \lambda + \mu + \nu, \tag{44}$$

was man auch direkt durch Addition der ersten drei Gleichungen (38) findet.

§ 10. Die Zerlegung einer lineären Veränderung in eine Translation, eine Rotation und eine Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen ist nicht die einzig mögliche, sondern sie empfiehlt sich nur besonders durch ihre einfache physikalische Bedeutung; man kann statt dessen auch noch andere verhältnismäßig einfache Zerlegungen vornehmen. So läßt sich die unendlich kleine homogene Veränderung:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \lambda\, a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_1 a + \mu\, b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_1 a + \nu_2 b + \nu\, c \end{aligned}\right. \tag{45}$$

auch auffassen als hervorgebracht durch eine Dilatation nach den drei Koordinatenachsen, mit den Hauptdilatationen λ, μ, ν, und außerdem durch sechs Veränderungen, die durch die Gleichungen $u = \lambda_2 b$, $v = 0$, $w = 0$, $u = \lambda_3 c$, $v = 0$, $w = 0$, usw. dargestellt werden. Die Reihenfolge ihrer Ausführung ist gleichgültig, da durch eine Änderung derselben nur Unterschiede von kleinerer Größenordnung hervorgerufen werden (vgl. hierzu I. § 101). Eine jede dieser sechs Veränderungen besitzt eine einfache Bedeutung: so sind bei der ersten die Verschiebungen unabhängig von a und c und erfolgen alle in der Richtung der x-Achse, d. h. jede zur xz-Ebene parallele Ebene führt eine einfache Translation aus, sie verschiebt sich als Ganzes, ohne Drehung und ohne Deformation, und zwar in der x-Richtung, und nur die Größe der Verschiebung variiert von Ebene zu Ebene. Eine solche Veränderung ähnelt der aneinander vorbeigleitenden Bewegung der beiden Hälften einer Schere und wird daher als „Scherung“ oder auch als „Schiebung“ bezeichnet. Danach gilt der Satz, daß eine jede unendlich kleine homogene Veränderung hervorgebracht werden kann durch eine Dilatation nach

den drei Koordinatenachsen und sechs Scherungen der den Koordinatenebenen parallelen Ebenen in Richtung der Achsen.

Trotz seiner einfachen Form besitzt dieser Satz aber doch im allgemeinen nur eine verhältnismäßig komplizierte physikalische Bedeutung. Nehmen wir z. B. die unendlich kleine Drehung $u = -\zeta b$, $v = \zeta a$, $w = 0$, einen Spezialfall der allgemeinen Verschiebung (39), so wäre dieselbe hier aufzufassen als hervorgebracht durch zwei aufeinanderfolgende Scherungen, also durch Veränderungen, die mit Deformationen des Körpers verbunden sind. Die Einführung der letzteren ist ganz überflüssig, da sie sich natürlich gegenseitig aufheben.

§ 11. Der in den letzten Paragraphen untersuchte Fall einer linearen Veränderung bietet nicht nur als ein spezielles einfaches Beispiel Interesse, sondern er besitzt auch eine wichtige Bedeutung für den allgemeinsten Fall einer beliebigen endlichen Veränderung, zu dessen Behandlung wir jetzt übergehen, indem wir zu den Gleichungen (2) zurückkehren. Dies rührt im Grunde daher, daß eine jede beliebige Funktion innerhalb eines unendlich kleinen Gebiets ihrer Variabeln als lineare Funktion betrachtet werden kann.

Fassen wir nämlich einen bestimmten materiellen Punkt P_0 mit den Koordinaten a_0, b_0, c_0 ins Auge, so wird derselbe durch die Veränderung an den Ort x_0, y_0, z_0 gebracht, wobei nach (2):

$$x_0 = f(a_0, b_0, c_0), \quad y_0 = \varphi(a_0, b_0, c_0), \quad z_0 = \psi(a_0, b_0, c_0). \tag{46}$$

Wenn wir nun weiter irgendeinen in unmittelbarer Nähe von P_0 gelegenen materiellen Punkt P mit den Koordinaten:

$$a = a_0 + a', \quad b = b_0 + b', \quad c = c_0 + c' \tag{47}$$

betrachten, der durch die Veränderung an den Ort:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z' \tag{48}$$

gelangen möge, so sind nach der Voraussetzung a', b', c' unendlich klein, folglich nach (2) und (46), mit Entwicklung nach der Taylorschen Reihe:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 c', \\ y' &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 c', \\ z' &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 c'. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Indem man a', b', c' alle möglichen unendlich kleinen Werte durchlaufen läßt, erhält man aus diesen Gleichungen die Verände-

rung desjenigen unendlich kleinen Körperteils, der den Punkt P_0 rings umgibt. Man kann also dieselbe auffassen als hervorgebracht durch eine endliche Translation mit den Komponenten:

$$x_0 - a_0 = u_0, \quad y_0 - b_0 = v_0, \quad z_0 - c_0 = w_0,$$

welche einen Punkt P aus der Lage (a, b, c) in die Lage

$$a + u_0 = x_0 + a', \quad b + v_0 = y_0 + b', \quad c + w_0 = z_0 + c'$$

versetzt, und eine endliche lineäre homogene Veränderung (49), mit dem Punkt P_0 als ruhendem Anfangspunkt, bei welcher der Punkt P seine Koordinaten (a', b', c') mit den Koordinaten (x', y', z') vertauscht.

Setzen wir zur Abkürzung die neun Koeffizienten der Veränderung (49):

$$(50)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 = \lambda_1, & \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 = \lambda_2, & \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 = \lambda_3, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 = \mu_1, & \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 = \mu_2, & \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 = \mu_3, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 = \nu_1, & \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 = \nu_2, & \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 = \nu_3, \end{array} \right.$$

so gelangen wir auch formell zu den Gleichungen (23), und es lassen sich ohne weiteres alle Folgerungen aussprechen, welche wir damals aus diesen gezogen haben.

Bei einer beliebigen Veränderung eines Körpers verändert sich also jeder einzelne unendlich kleine Teil des Körpers oder jedes „Körperelement“ lineär, und der Unterschied gegen die früher betrachtete lineäre Veränderung des Körpers besteht nur darin, daß die Koeffizienten (λ, μ, ν) der Veränderung von Element zu Element wechseln. Wir heben von den hieraus entspringenden Sätzen einige der wichtigsten hervor.

Auch bei der allgemeinsten Veränderung bleiben unendlich kleine Parallelepipede erhalten, nur die Winkel können sich bis zu beliebigem Betrage ändern, ebenso bleibt die Ordnungszahl einer unendlich kleinen Fläche erhalten; so verwandelt sich z. B. eine unendlich kleine Kugel in ein Ellipsoid, in dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel übergeht. Das gibt Anlaß zu einer auf den ersten Blick eigentümlichen Folgerung. Stets wird die Oberfläche des Körpers nach der Veränderung von den nämlichen materiellen Punkten gebildet wie vor der Veränderung. Denn ein jeder Punkt, der vor der Veränderung nicht an der Oberfläche liegt, läßt sich auffassen als der Mittelpunkt einer Kugel, die ganz im Innern

liegt, und deren Mittelpunkt daher auch im Innern bleibt. Dasselbe gilt natürlich auch für die umgekehrte Veränderung, und damit ist die Folgerung bewiesen.

Die Volumendilatation wird ebenso wie in (22) bestimmt durch die Funktionaldeterminante (7):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}, \tag{51}$$

wenn wir der Einfachheit halber den Index 0 von jetzt an fortlassen. Dabei bezeichnet der Wert von D das Verhältnis des Volumens eines den materiellen Punkt (a, b, c) enthaltenden Körperelements nach der Veränderung zu seinem Volumen vor der Veränderung.

Löst man die Gleichungen (49) nach a', b', c' auf, so erhält man hierfür lineäre homogene Ausdrücke mit den Koeffizienten (λ', μ', ν'), deren Werte durch (6) gegeben sind:

$$\lambda_1' = \frac{[\lambda_1]}{D} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D} = \frac{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}}{D}, \text{ usw.} \tag{52}$$

Andererseits kann man aber auch zuerst die Gleichungen (2) nach a, b, c auflösen und erst dann die Substitutionen (47) und (48) mit der Taylorschen Reihenentwicklung vornehmen. Auf diesem Wege ergibt sich analog (49):

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial a}{\partial x}x' + \frac{\partial a}{\partial y}y' + \frac{\partial a}{\partial z}z', \\ b' &= \frac{\partial b}{\partial x}x' + \frac{\partial b}{\partial y}y' + \frac{\partial b}{\partial z}z', \\ c' &= \frac{\partial c}{\partial x}x' + \frac{\partial c}{\partial y}y' + \frac{\partial c}{\partial z}z', \end{aligned}$$

wo nun die Koeffizienten übereinstimmen müssen mit den (λ', μ', ν'). Dies ergibt die Gültigkeit der folgenden Transformationsformeln:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right]}{D}, \quad \ldots, \tag{53}$$

durch welche die Differentialquotienten bei unabhängigen x, y, z allgemein zurückgeführt werden auf die Differentialquotienten bei unabhängigen a, b, c.

Analoge Gleichungen gelten selbstverständlich für den umgekehrten Übergang von x, y, z zu a, b, c als unabhängigen Variabeln. Die dabei auftretende Funktionaldeterminante:

$$(54) \qquad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial b}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix}$$

bezeichnet das Verhältnis, in welchem sich das Volumen eines Körperelements verändert, wenn ein materieller Punkt aus der Lage x, y, z in die Lage a, b, c übergeht. Da sich die beiden Übergänge gegenseitig aufheben, so ist:

$$(55) \qquad D \cdot D' = 1,$$

welche Beziehung sich auch direkt ergibt, wenn man das Multiplikationstheorem (§ 5) der Determinanten auf (51) und (54), in der zweiten Form, anwendet und bedenkt, daß

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \text{ usw.} \end{cases}$$

Außer der Volumendilatation $D - 1$ eines Körperelements ist von besonderer Wichtigkeit seine Drehung und seine Dilatation. Beides ergibt sich aus den Gleichungen (32), mit Benutzung der Werte (50) für die neun Koeffizienten λ, μ, ν.

§ 12. Durchführen wollen wir die Rechnung nur für den speziellen Fall einer beliebigen unendlich kleinen Veränderung, die dadurch charakterisiert sein möge, daß die Verschiebungskomponenten (3) als beliebige unendlich kleine Funktionen von a, b, c gegeben sind. Dann gelten für ein den Punkt (a_0, b_0, c_0) enthaltendes Körperelement alle Sätze des § 9. Insbesondere ist die Drehung durch (37), die Dilatation durch (38) gegeben, wobei die unendlich kleinen Koeffizienten (λ, μ, ν) nach (50), (3) und (34) folgende Werte besitzen:

$$(57) \quad \begin{cases} \lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0, \quad \lambda_3 = \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0, \\ \mu_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0, \quad \mu = \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0, \quad \mu_3 = \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0, \\ \nu_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0, \quad \nu_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0, \quad \nu_3 = \left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0. \end{cases}$$

Durch die Einführung der Verschiebungskomponenten u, v, w werden die Buchstaben x, y, z in ihrer bisherigen Bedeutung überflüssig, da dieselben durch $a + u$, $b + v$, $c + w$ ersetzt werden können. Daher gebraucht man häufig x, y, z in der bisherigen Bedeutung von a, b, c und kann die Buchstaben a, b, c ganz entbehren. Aber auch mit Beibehaltung der Bedeutung aller benutzten Zeichen lassen sich bei unendlich kleinen Veränderungen die Variabeln a, b, c in allen Differentialquotienten ohne merklichen Fehler durch x, y, z ersetzen. So ist z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial a}$$

oder nach (3):

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{58}$$

bis auf kleine Größen höherer Ordnung. Entsprechendes gilt für alle anderen Differentialquotienten.

Wenn wir nun den Index 0 wieder überall weglassen, so sind demnach die Komponenten der Drehung nach (37) und (57):

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{59}$$

Für die Berechnung der Dilatation führen wir die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = x_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z, \\ &\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = y_z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x_y, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

wobei offenbar

$$y_z = z_y, \quad z_x = x_z, \quad x_y = y_x. \tag{60a}$$

Dann ist die Volumendilatation nach (42) und (57):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = x_x + y_y + z_z. \tag{61}$$

Ferner sind nach (57) die Hauptdilatationen die drei Wurzeln der in l kubischen Gleichung (41):

$$\begin{vmatrix} x_x - l & \frac{1}{2}x_y & \frac{1}{2}x_z \\ \frac{1}{2}y_x & y_y - l & \frac{1}{2}y_z \\ \frac{1}{2}z_x & \frac{1}{2}z_y & z_z - l \end{vmatrix} = 0. \tag{62}$$

Die Richtungen der entsprechenden Dilatationsachsen ergeben sich dann nach (40) und (57) aus zwei der Gleichungen:

$$(63)\quad \begin{cases} (x_x - l)\alpha + \frac{x_y}{2}\beta + \frac{x_z}{2}\gamma = 0, \\ \frac{y_x}{2}\alpha + (y_y - l)\beta + \frac{y_z}{2}\gamma = 0, \\ \frac{z_x}{2}\alpha + \frac{xy}{2}\beta + (z_z - l)\gamma = 0, \end{cases}$$

wobei das gemeinschaftliche Vorzeichen der Richtungscos α, β, γ unbestimmt bleibt.

Umgekehrt folgen, wenn die Hauptdilatationen l, m, n und die dazugehörigen Dilatationsachsen durch ihre Richtungen (α, β, γ) gegeben sind, eindeutig die Komponenten der Dilatation nach (38):

$$(64)\quad \begin{cases} x_x = l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2, \cdots \\ \frac{1}{2}z_y = \frac{1}{2}y_z = l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3, \cdots \end{cases}$$

§ 13. In der Vektorrechnung werden alle diese Beziehungen, welche außer in der Theorie der deformierbaren Körper auch auf manchen anderen Gebieten der Physik in veränderter Bedeutung eine charakteristische Rolle spielen, mit besonderen Namen belegt und durch abkürzende Symbole bezeichnet. So nennt man denjenigen Vektor, der sich aus dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{q}$ mit den Komponenten u, v, w in der Weise ergibt, daß die eingeklammerten Größen der Gleichungen (59) seine Komponenten darstellen, die „Rotation" (rot) des Vektors $\mathfrak{q}$, und schreibt zur Bezeichnung des Drehungsvektors $\mathfrak{o}$ mit den Komponenten ξ, η, ζ statt der drei Gleichungen (59) die eine Gleichung:

$$(65)\qquad \mathfrak{o} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{q}.$$

Die formale Ungereimtheit, welche darin liegt, daß die Drehung nicht gleich der ganzen, sondern gleich der halben Rotation ist, muß mit der nun einmal eingeführten Bezeichnung in Kauf genommen werden, sie wird deshalb etwas weniger fühlbar empfunden, weil die Operation rot ihr Hauptanwendungsgebiet gar nicht in der Mechanik, sondern in der Elektrodynamik hat, wo von Drehungen gar keine Rede ist.

Ferner nennt man diejenige skalare Größe, die sich aus dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{q}$ durch die in (61) angegebene Operation er-

gibt, seine „Divergenz“ (div), und schreibt die Volumendilatation (61) in der Form:

$$\operatorname{div} \mathfrak{q}. \tag{66}$$

Auch hier ist jede Bezugnahme auf ein bestimmtes Koordinatensystem ausgeschaltet.

Was endlich die Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen betrifft, so ist dieselbe nicht wie ein Vektor durch eine einzige gerichtete Größe zu charakterisieren, sondern sie stellt ein höheres Gebilde vor, welches man als einen „Tensor“, speziell einen Tensortripel zweiten Ranges bezeichnet, indem als Tensoren ersten Ranges die Vektoren angesehen werden. Dieser Tensor ist bestimmt durch sechs voneinander unabhängige Größen, nämlich entweder durch die drei „Hauptwerte“ l, m, n in Verbindung mit den drei entsprechenden aufeinander senkrechten „Hauptachsen“ $(\alpha_1, \cdots \gamma_3)$, wobei die beiden entgegengesetzten Richtungen einer Achse vollkommen gleichwertig und vertauschbar sind, oder durch die sechs „Komponenten“ x_x, y_y, z_z, $\frac{1}{2}y_z$, $\frac{1}{2}z_x$, $\frac{1}{2}x_y$. Wegen der Beziehungen (60a) heißt der Tensor symmetrisch. Zwischen den Hauptwerten, den Hauptachsenrichtungen und den Komponenten bestehen die Beziehungen (62), (63) und (64). Wenn speziell die drei Hauptwerte l, m, n einander gleich sind (gleichmäßige Dilatation), so ist

$$x_x = y_y = z_z = l = m = n,$$
$$x_y = y_z = z_x = 0$$

und die Hauptachsen sind völlig unbestimmt.

Weitere Eigenschaften eines symmetrischen Tensors werden sich später ergeben (§ 20).

Zweites Kapitel. Dynamische Gesetze.

§ 14. Nach Beendigung der rein kinematischen Betrachtungen wenden wir uns jetzt zur Dynamik, d. h. zur Untersuchung der Kräfte, welche die Deformation eines Körpers hervorrufen, und fragen zunächst nach den Bedingungen des Gleichgewichts.

Nehmen wir also irgendeinen Körper, der sich unter der Einwirkung gewisser Kräfte in einem deformierten Zustand befindet, z. B. einen gebogenen Stab, einen tordierten Draht, ein komprimiertes Gas. Die auf den Körper wirkenden Kräfte wollen wir in zwei Klassen teilen:

1. Kräfte, welche auf alle, auch die inneren Teile des Körpers wirken — die „Massenkräfte". Wir setzen dieselben, wie z. B. die Schwere, den Massenelementen des Körpers proportional.

Bezeichnet $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ das Volumen, k die Dichtigkeit eines Massenelements, so seien die Komponenten der auf das Element wirkenden Massenkraft (vgl. I. § 31):

$$(67) \qquad Xk\,d\tau, \quad Yk\,d\tau, \quad Zk\,d\tau.$$

Die Größen X, Y, Z betrachten wir als endlich.

2. Kräfte, welche auf die Oberfläche des Körpers wirken — die „Flächenkräfte". Für irgendein Stück σ der Oberfläche des Körpers nennen wir den Quotienten der resultierenden darauf wirkenden Flächenkraft, dividiert durch den Flächeninhalt von σ, den „mittleren Druck" auf σ. Wenn das Flächenstück zu einem Flächenelement $d\sigma$ zusammenschrumpft, so nennen wir jenen Quotienten den „Druck" auf $d\sigma$ schlechthin, und betrachten ihn als eine endliche Größe. Zur Bezeichnung der auf $d\sigma$ wirkenden Flächenkraft wollen wir, da für $d\sigma$ nicht nur der Ort, sondern auch die Richtung charakteristisch ist, den Buchstaben X, Y, Z für die Komponenten noch die Normale ν von $d\sigma$, nach dem Innern des Körpers gerichtet, als Index anhängen. Dann sind die Komponenten der auf das Oberflächenelement $d\sigma$ wirkenden Flächenkraft:

$$(68) \qquad X_\nu d\sigma, \quad Y_\nu d\sigma, \quad Z_\nu d\sigma.$$

Die Richtung dieser Flächenkraft kann einen beliebigen Winkel mit der Normalen ν bilden. Fallen die beiden Richtungen zusammen, so wirkt die Flächenkraft im Sinne einer Kompression des Körpers, wie der Druck auf ein Gas; sind die Richtungen entgegengesetzt, so wirkt die Flächenkraft im Sinne einer Ausdehnung, wie ein Zug auf einen gespannten Draht; stehen die Richtungen senkrecht aufeinander, so wirkt die Flächenkraft im Sinne einer Scherung (§ 10), wie bei der Torsion oder bei der Reibung.

Der Druck, die Resultierende der drei Druckkomponenten X_ν, Y_ν, Z_ν, ist natürlich von der Dimension des Quotienten einer Kraft, dividiert durch eine Fläche, oder $[ml^{-1}t^{-2}]$ (I. § 9).

§ 15. Die Gesetze des Gleichgewichts eines deformierten Körpers sind alle enthalten in dem Satz der allgemeinen Mechanik (I. § 112): Wenn ein Punktsystem im Gleichgewicht ist, so halten sich die äußeren Kräfte an dem starr gedachten System im Gleichgewicht.

Die Fruchtbarkeit dieses Satzes entspringt daraus, daß man als Punktsystem jeden beliebigen Teil des Körpers benutzen kann. Denken wir uns z. B. den Körper durch irgendeine fingierte Fläche σ in zwei Teile 1 und 2 (Fig. 1) zerlegt und wählen wir den Teil 1 als Punktsystem, so befindet sich dieser Körperteil, als starr gedacht, im Gleichgewicht unter der Einwirkung der äußeren auf ihn wirkenden Kräfte. Zu den äußeren Kräften gehören dann aber nach I. § 112 außer den Massenkräften und den auf die reale Oberfläche wirkenden Kräften auch noch die auf die fingierte Oberfläche σ wirkenden Kräfte, welche von dem Körperteil 2 herrühren, und welche dadurch definiert sind, daß man sie besonders anbringen müßte, um, falls der Körperteil 2 ganz entfernt wird, eine Störung des Gleichgewichts zu vermeiden.

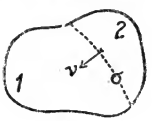

Fig. 1.

Auf jedes Element $d\sigma$ der Oberfläche des Körperteils 1 wirkt nun nach der von uns gewählten Bezeichnung eine Flächenkraft mit den Komponenten (68). Auf diese Weise gelangt man dazu, auch im Innern eines Körpers an jeder Stelle Druckkräfte in ganz bestimmtem Sinne als wirksam anzunehmen. Deren Größe hängt aber außer vom Ort auch von der Richtung des Flächenelements $d\sigma$ bzw. seiner Normalen ν ab. Kehrt man die Richtung von ν um, d. h. betrachtet man den Körperteil 2 als Punktsystem, so tritt an Stelle von (68) die Flächenkraft, die der Körperteil 1 im Flächenelement $d\sigma$ auf den Körperteil 2 ausübt, und diese ist nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung der vorigen gerade entgegengesetzt. Also haben wir allgemein:

$$X_{-\nu} = -X_\nu, \quad Y_{-\nu} = -Y_\nu, \quad Z_{-\nu} = -Z_\nu. \tag{69}$$

Um einzusehen, daß an einem bestimmten Orte der Druck je nach der Richtung von $d\sigma$ sehr verschiedene Werte annehmen kann, betrachten wir als Beispiel einen horizontal liegenden zylindrischen Stab, der in seiner Längsrichtung von zwei entgegengesetzt gleichen Kräften gespannt wird (Fig. 2). Denken wir uns nun in einem inneren Punkt P eine horizontale Fläche gelegt und betrachten den darüber liegenden Stabteil als Punktsystem, so wirkt auf ein Flächenelement in P der Druck Null, weil

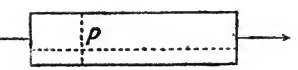

Fig. 2.

das Gleichgewicht gar nicht gestört wird, wenn man den unteren Stabteil ganz entfernt. Legen wir aber durch denselben Punkt P eine vertikale Fläche und betrachten den links davon liegenden Stabteil als Punktsystem, so wirkt auf ein Flächenelement in P ein mehr oder minder erheblicher Druck, da ohne Anbringung einer besonderen Kraft das Gleichgewicht des Punktsystems eine Störung erleiden würde, falls man den rechts gelegenen Stabteil ganz entfernte.

Das allgemeine Gesetz, nach welchem Größe und Richtung des Druckes in einem bestimmten Punkte P eines Körpers von der Richtung der Normalen des durch P gelegten Flächenelements abhängt, wird sich im § 17 aus den dynamischen Beziehungen ergeben.

§ 16. Nachdem die Gesetze für das Gleichgewicht eines deformierten Körpers auf solche der allgemeinen Mechanik zurückgeführt sind, wollen wir dasselbe für den allgemeineren Fall der Bewegung eines deformierten Körpers tun. Dies geschieht einfach durch eine Anwendung des Prinzips von d'Alembert, wonach bei jeder Bewegung eines Systems materieller Punkte die äußeren Kräfte und die Trägheitswiderstände sich zu jeder Zeit an dem starr gedachten System im Gleichgewicht halten (I. § 130).

Da der Trägheitswiderstand eines Massenelements:

$$(70) \qquad -\frac{d^2x}{dt^2}k\,d\tau\,, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}k\,d\tau\,, \quad -\frac{d^2z}{dt^2}k\,d\tau$$

der Masse des Elements proportional ist, so gehört er zu den Massenkräften, und der ganze Unterschied der Dynamik eines deformierten Körpers gegenüber der Statik besteht einfach darin, daß zu den Komponenten X, Y, Z der auf die Masseneinheit bezogenen Kräfte (67) sich die negativen Komponenten der Beschleunigung addieren.

Wenden wir also nun die sechs Bedingungsgleichungen (I.(306a)) für das Gleichgewicht eines starren Körpers auf den hier vorliegenden Fall an und benutzen dabei die eingeführten Bezeichnungen, so ergeben sich für die Bewegung eines deformierten Körpers die folgenden sechs Gleichungen:

$$(71) \qquad \int\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k\,d\tau+\int X_\nu\,d\sigma=0\,, \quad \text{usw.},$$

$$(72) \qquad \int\left\{y\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-z\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}k\,d\tau+\int(yZ_\nu-zY_\nu)\,d\sigma=0, \text{ usw.},$$

wo $d\tau$ ein Volumenelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement eines beliebigen herausgegriffenen Körperteils bezeichnet und die Integrationen sich auf diesen Körperteil beziehen. Natürlich gelten die Gleichungen auch für den ganzen Körper.

Durch die Gleichungen (71) und (72) ist der Zusammenhang der Kräfte mit den Beschleunigungen vollkommen erschöpfend dargestellt. Die folgenden Abschnitte bringen lediglich eine nähere Untersuchung ihres Inhalts.

§ 17. Wir wenden zunächst die Gleichungen (71) an auf ein unendlich kleines irgendwo im Innern gelegenes Körperelement, dessen Form in folgender Weise gewählt ist. Durch einen beliebigen Punkt P ziehen wir die drei zu den positiven Richtungen der Koordinatenachsen Parallelen (Fig. 3), und schneiden dann in unendlich kleiner Entfernung von P diese drei Gerade durch eine, in der Figur vor dem Punkte P gelegene Ebene. Dadurch entsteht ein Tetraeder, in dessen Eckpunkte P die drei Kanten rechtwinklig zusammenstoßen. Nennen wir die Größe der dem Punkte P gegenüberliegenden Seitenfläche $d\sigma$, ihre nach dem Innern des Tetraeders gerichtete Normale ν, und die Größen der drei anderen Seitenflächen $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$, je nach ihren Normalen, so stellen die letztgenannten Flächen die Projektionen von $d\sigma$ auf die drei Koordinatenebenen dar, es gelten also die Beziehungen:

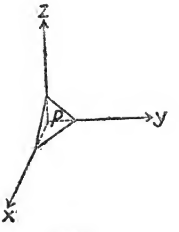

Fig. 3.

$$d\sigma_x = -d\sigma\cos(\nu x),\quad d\sigma_y = -d\sigma\cos(\nu y),\quad d\sigma_z = -d\sigma\cos(\nu z), \tag{73}$$

da alle Flächengrößen positiv sind, während die Normale ν mit allen Koordinatenrichtungen stumpfe Winkel bildet.

In Gleichung (71) reduziert sich für unseren Fall das Volumenintegral auf ein einziges Glied, welches das Volumen $d\tau$ des Tetraeders als Faktor enthält, während das Oberflächenintegral gleich ist der Summe von vier Gliedern, deren jedes einer Seitenfläche des Tetraeders entspricht und ihrer Größe proportional ist. Da nun $d\tau$ von der dritten Ordnung, die $d\sigma$ aber von der zweiten Ordnung unendlich klein sind, so verschwindet das Volumenintegral gegen jedes einzelne der Glieder des Oberflächenintegrals, und die Gleichung (71) geht über in

$$X_x d\sigma_x + X_y d\sigma_y + X_z d\sigma_z + X_\nu d\sigma = 0,$$

wobei berücksichtigt ist, daß die inneren Normalen der Seitenflächen des Tetraeders durch x, y, z, ν dargestellt werden. Dies mit (73) kombiniert liefert:

$$(74)\quad \begin{cases} X_\nu = X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) \\ \text{und ebenso aus den anderen beiden Gleichungen (71):} \\ Y_\nu = Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z), \\ Z_\nu = Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z). \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben für jeden Punkt P des Körpers den Zusammenhang der Größe und Richtung des dort wirkenden Druckes (X_ν, Y_ν, Z_ν) mit der Richtung der Normalen ν des Flächenelements, auf welches der Druck wirkt (vgl. § 15 am Schluß). Denn ob $d\sigma$ genau durch den Punkt P oder in unendlich kleiner Entfernung von ihm gelegt ist, macht für die endlichen Werte der Druckkomponenten keinen Unterschied.

Hiernach ist der Druck für jede beliebige Richtung von ν bestimmt, sobald die neun Druckkomponenten $X_x, \cdots Z_z$ bekannt sind. Fällt ν mit einer Koordinatenrichtung zusammen, so sind die Gleichungen identisch erfüllt. Auch genügen sie allgemein den Forderungen (69), da die cos ihre Vorzeichen umkehren, wenn ν mit der entgegengesetzten Richtung vertauscht wird.

Von den neun den Koordinatenflächen $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ entsprechenden Druckkomponenten stellen die in der Diagonale stehenden X_x, Y_y, Z_z solche Drucke dar, welche normal auf ihre Fläche wirken, und zwar bedeutet ein positiver Wert stets einen Kompressionsdruck wie bei einem Gas, unabhängig von der gewählten Koordinatenrichtung, ein negativer stets einen Zug wie bei einem gespannten Draht (vgl. § 14). Denn bei einer Umkehrung der Koordinatenrichtung kehrt sowohl die Komponente der Flächenkraft als auch die innere Normale ihr Vorzeichen um. Natürlich brauchen die drei Normaldrucke nicht alle das nämliche Vorzeichen zu haben.

Die übrigen sechs Druckkomponenten sind die Tangentialdrucke oder scherenden Drucke, auch Schubspannungen genannt, wie sie bei der Torsion und bei der Reibung auftreten. Es sei schließlich daran erinnert, daß alle vorstehenden Betrachtungen sich auf ein unendlich kleines Körperelement beziehen, und daß die Größen der Druckkomponenten von Element zu Element wechseln können. Daher sind im allgemeinen die neun Druckkomponenten $X_x, \cdots Z_z$ als Funktionen des Ortes x, y, z zu betrachten.

§ 18. Um die dynamischen Gleichungen (71) und (72) zu weiteren Schlüssen zu benutzen, leiten wir zuerst einen mathematischen Satz ab, der uns auch bei anderen Gelegenheiten noch häufig gute Dienste leisten wird; er betrifft die Umwandlung eines gewissen Raumintegrals in ein Oberflächenintegral. Es bezeichne φ eine eindeutige stetige Funktion der Raumkoordinaten x, y, z, und es handle sich um die Berechnung des Integrals:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot d\tau, \tag{75}$$

zu erstrecken über einen bestimmten Raum, der in der Fig. 4 der Allgemeinheit halber so gezeichnet ist, daß seine Oberfläche, von außen betrachtet, auch konkave Stellen besitzt. Die Oberfläche dürfte übrigens auch aus verschiedenen ganz getrennten Stücken bestehen, ohne daß die Gültigkeit der folgenden Sätze dadurch beeinträchtigt würde.

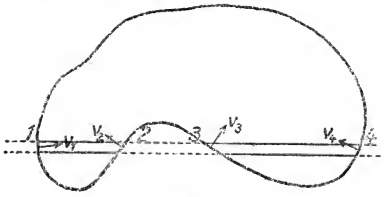

Fig. 4.

Wir setzen $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$, und integrieren zunächst über x, indem wir y und z konstant halten, d. h. wir summieren über die Volumenelemente eines unendlich dünnen, der x-Achse parallelen Zylinders mit dem Querschnitt $dy \cdot dz$.

Wenn der Zylinder die Oberfläche des Integrationsraumes in mehreren Punkten 1, 2, 3, 4 schneidet, so wird er dadurch in mehrere Teilzylinder zerlegt, und das Integral über den ganzen Zylinder ist gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Teilzylinder, also in unserem Falle:

$$dy\,dz\,(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3). \tag{76}$$

Bezeichnen wir die Größen der Flächenelemente, welche der Zylinder aus der Oberfläche des Integrationsraumes ausschneidet, mit $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$, ihre inneren Normalen mit $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$, so ist

$$\begin{aligned} dy\,dz = d\sigma_1 \cos(\nu_1 x) &= -\,d\sigma_2 \cos(\nu_2 x) = d\sigma_3 \cos(\nu_3 x) \\ &= -\,d\sigma_4 \cos(\nu_4 x) \end{aligned} \tag{77}$$

und das Integral (76) über den Zylinder wird:

$$\begin{aligned} &-\varphi_1 \cos(\nu_1 x)\, d\sigma_1 - \varphi_2 \cos(\nu_2 x)\, d\sigma_2 - \varphi_3 \cos(\nu_3 x)\, d\sigma_3 \\ &\quad - \varphi_4 \cos(\nu_4 x)\, d\sigma_4. \end{aligned}$$

Ein entsprechender Ausdruck gilt für jeden der unendlich vielen unendlich dünnen zur x-Achse parallelen Zylinder, in die der ganze Integrationsraum zerlegt gedacht werden kann, und die Summe aller dieser Ausdrücke, oder das gesuchte Integral, läßt sich mithin schreiben:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot d\tau = -\int \varphi \cos(\nu x)\, d\sigma, \tag{78}$$

zu erstrecken über alle Elemente $d\sigma$ der Oberfläche des Integrationsraumes.

Setzen wir als Beispiel $\varphi = \text{const}$, so erhalten wir die Identität:

$$\int \cos(\nu x)\, d\sigma = 0,$$

deren Gültigkeit für jede beliebige Form der Oberfläche auch direkt leicht einzusehen ist, wenn man sich den Sinn dieser Gleichung an der Hand der Beziehung (77) klarmacht.

Für späteren Gebrauch stellen wir gleich hier einige allgemeinere und speziellere Anwendungen der abgeleiteten Formel zusammen.

Wenn wir mit ψ irgendeine zweite eindeutige stetige Funktion bezeichnen, so liefert die Gleichung:

$$\frac{\partial (\varphi \cdot \psi)}{\partial x} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

über irgendeinen Raum integriert, nach (78) auf der linken Seite ein Oberflächenintegral, auf der rechten zwei Raumintegrale, so daß wir schreiben können:

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = -\int \varphi \psi \cos(\nu x)\, d\sigma - \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau. \tag{79}$$

Diese Beziehung spricht den Satz der partiellen Integration aus, angewendet auf ein Gebiet von dreifacher Mannigfaltigkeit.

Eine häufig zu benutzende Anwendung der Gleichung (79) ist die folgende:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) d\tau \\ = -\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\nu y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\nu z)\right) \psi\, d\sigma \\ - \int \psi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) d\tau\end{aligned}$$

oder nach (I. § 39) und (I. (129))

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau=-\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma-\int\psi\cdot\Delta\varphi\cdot d\tau. \quad (80)$$

Für $\psi=\varphi$ ergibt sich spezieller:

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau=-\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma-\int\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot d\tau \quad (81)$$

und für $\psi=\text{const}$:

$$\int\Delta\varphi\cdot d\tau=-\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma. \quad (82)$$

§ 19. Nehmen wir nun wieder die dynamischen Gleichungen (71), angewendet auf einen beliebigen Teil des Körpers, zunächst die erste derselben, und ersetzen das darin vorkommende X_ν durch (74), so können wir das Oberflächenintegral nach (78) als Raumintegral schreiben, da z. B.

$$\int X_x\cos(\nu,x)\,d\sigma=-\int\frac{\partial X_x}{\partial x}d\tau,$$

und dieses Raumintegral mit dem ersten Integral von (71) zu einem einzigen Raumintegral vereinigen. Wählen wir dann den Körperteil unendlich klein, vom Volumen $d\tau$, so reduziert sich das Raumintegral auf ein einziges Glied, und es ergibt sich, mit Weglassung des Faktors $d\tau$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\\ \text{ebenso:}\quad&\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,\\ \text{und:}\quad&\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0,\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

gültig für jeden Punkt des Körpers.

Charakteristisch für diese Gleichungen ist, daß in ihnen die Druckkomponenten nicht mit ihren absoluten Werten, sondern nur mit ihren räumlichen Differentialquotienten auftreten.

Ein gleichmäßiger Druck, mag er auch noch so groß sein, vermag also niemals eine Bewegung hervorzurufen, es gehört dazu immer eine räumliche Veränderlichkeit des Druckes, oder ein „Druckgefälle“. In dieser Beziehung ähnelt die physikalische Bedeutung eines Druckes derjenigen eines Potentials (vgl. I. § 39f).

Ganz ebenso können wir in den dynamischen Gleichungen (72) das Oberflächenintegral in ein Raumintegral verwandeln, nach dem Muster der Umformung:

$$\int y\, Z_x \cos(\nu x)\, d\sigma = -\int \frac{\partial (y Z_x)}{\partial x}\, d\tau$$

und erhalten so auf dem nämlichen Wege aus der ersten jener Gleichungen:

$$\left\{y\left(Z - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - z\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\} k$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}(y Z_x - z Y_x) - \frac{\partial}{\partial y}(y Z_y - z Y_y) - \frac{\partial}{\partial z}(y Z_z - z Y_z) = 0$$

oder, mit Elimination der Massenkräfte durch (83) und Ausführung der Differentiationen:

$$(84) \qquad Z_y = Y_z. \quad \text{Ebenso: } X_z = Z_x \quad \text{und} \quad Y_x = X_y.$$

Die Tangentialkomponenten des Druckes sind also paarweise einander gleich, und die neun Druckkomponenten $X_x, \cdots Z_z$ reduzieren sich dadurch ganz allgemein auf sechs.

Die Gleichungen (83) und (84) sind physikalisch vollkommen äquivalent den Gleichungen (71) und (72), da man aus ihnen durch Integration über irgendeinen Körperteil wieder zu letzteren übergehen kann. Wir werden sie künftig allen Untersuchungen über Gleichgewichts- und Bewegungsprobleme zugrunde legen.

§ 20. Nachdem durch die Beziehungen (84) die Gesetze (74) des Druckzustandes an einer bestimmten Stelle des Körpers sich erheblich vereinfacht haben, wollen wir jetzt die Form dieser Gesetze näher untersuchen und stellen zunächst einmal die Frage, ob es, wenn die sechs Druckkomponenten $X_x, \cdots Z_z$ beliebig gegeben sind, Flächenelemente gibt, auf welche der Druck senkrecht wirkt, für die also die Richtung des Druckes zusammenfällt mit der Richtung ihrer Normalen. Die Bedingung hierfür ist:

$$X_\nu = p \cos(\nu x), \quad Y_\nu = p \cos(\nu y), \quad Z_\nu = p \cos(\nu z),$$

wenn p die Größe des Druckes bezeichnet. Dies in (74) eingesetzt ergibt:

$$(85) \quad \begin{cases} (X_x - p)\cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) = 0, \\ Y_x \cos(\nu x) + (Y_y - p)\cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z) = 0, \\ Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + (Z_z - p)\cos(\nu z) = 0, \end{cases}$$

und diese Gleichungen sind, abgesehen von der Bezeichnung und davon, daß es sich hier um lauter endliche Größen handelt, vollkommen identisch mit den Gleichungen (40) oder (63), sie führen also auch zu denselben Resultaten, die wir in folgende Sätze zusammenfassen können.

Der Druckzustand in einem Körperelement wird stets dargestellt durch einen symmetrischen Tensor, den Druck- oder Spannungstensor, dessen Komponenten die 6 Druckkomponenten, und dessen Hauptwerte die sogenannten „Hauptdrucke" p, q, r bilden, das sind die Wurzeln einer kubischen Gleichung von der Form (62). Die Hauptachsen des Tensors sind die Normalen derjenigen Flächenelemente, auf welche der Druck senkrecht wirkt, sie sind also zugleich auch die Richtungen der entsprechenden Hauptdrucke. Durch die Größen und Richtungen der Hauptdrucke ist der ganze Druckzustand ebenso bestimmt wie durch die sechs Druckkomponenten in Bezug auf irgendein Koordinatensystem, nach Gleichungen von der Form (64). Wenn speziell die drei Hauptdrucke einander gleich sind (wie stets bei einer vollkommen elastischen Flüssigkeit, § 44), so sind die Normaldrucke $X_x = Y_y = Z_z = p = q = r$, die Tangentialdrucke $X_y = Y_z = Z_x = 0$, und die Richtungen der Hauptachsen sind unbestimmt.

Um uns für den allgemeinen Fall von dem Zusammenhang der Richtung des Druckes (X_ν, Y_ν, Z_ν) mit der Richtung der Normalen ν des Flächenelements, auf welches er wirkt, eine anschauliche Vorstellung zu bilden, denken wir uns die folgende ideale Fläche zweiter Ordnung (Ellipsoid oder Hyperboloid) konstruiert:

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy = \pm 1, \quad (86)$$

wo das Vorzeichen rechts so zu wählen ist, daß die vorzunehmenden geometrischen Operationen reell ausfallen.

Von dieser Fläche läßt sich folgender Satz beweisen: Die Richtung der Flächennormale im Endpunkt eines Durchmessers von der Richtung ν gibt die Richtung des Druckes an, welcher auf ein zu ν senkrechtes Flächenelement wirkt.

Bezeichnet nämlich $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, so sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} \quad (87)$$

die Richtungsverhältnisse der Normalen in dem Punkt (x, y, z) der

Fläche, und wenn dieser Punkt auf dem Durchmesser von der Richtung ν liegt, so ist

$$x : y : z = \cos(\nu x) : \cos(\nu y) : \cos(\nu z).$$

Durch diese Werte gehen die Verhältnisse (87), mit Benutzung des Ausdrucks (86) für die Funktion f, über in $X_\nu : Y_\nu : Z_\nu$, wie ein Blick auf (74) lehrt.

Nach ihrer soeben dargelegten physikalischen Bedeutung ist die Form und Lage der Fläche (86) unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem. Ihre Achsen sind offenbar die Hauptdruckachsen; für $p = q = r$ ist sie eine Kugel.

Allgemein läßt sich behaupten, daß beim Übergang von den Koordinaten x, y, z zu irgendwelchen anderen orthogonalen geradlinigen Koordinaten x', y', z' der Ausdruck (86) invariant bleibt. Denn die Gleichung, welche man statt (86) erhält, wenn man darin x', y', z' statt x, y, z und zugleich $X'_{x'}, \cdots Z'_{z'}$ statt $X_x, \cdots Z_z$ schreibt, stellt ja die nämliche Fläche dar. Der Zusammenhang der gestrichenen Druckkomponenten $X'_{x'}, \cdots$ mit den ungestrichenen $X_x, \cdots$ muß also ein derartiger sein, daß beim Ersetzen der gestrichenen durch die ungestrichenen Komponenten und Koordinaten die Gleichung (86) wieder herauskommt. Dieser Satz enthält die Gesetze der Transformation der Druckkomponenten von einem Koordinatensystem auf ein beliebiges anderes.

Es versteht sich, daß alle hier abgeleiteten Beziehungen nicht nur für den Drucktensor, sondern ebenso auch für den Deformationstensor und überhaupt für jeden symmetrischen Tensor zweiten Ranges entsprechende Gültigkeit besitzen. Nur ist ihre physikalische Bedeutung in den verschiedenen Fällen eine ganz verschiedene, mehr oder weniger wichtige. Auch das Trägheitsmoment (I. § 142) eines Körpers in Bezug auf die verschiedenen durch einen bestimmten Punkt gehenden Richtungen wird durch einen symmetrischen Tensor dargestellt, und zwar einen solchen, dessen Hauptwerte (die Hauptträgheitsmomente) stets positiv sind. Die Fläche (86) bildet dann das Trägheitsellipsoid. Man wird hier wieder, wie auch sonst häufig, auf die interessante Beobachtung geführt, daß die Natur, so ungeheuer mannigfaltig ihre Erscheinungen sich dem äußeren Anblicke nach darstellen, dennoch oft auf ganz entlegenen Gebieten mit denselben einfachen Mitteln arbeitet. Ohne diesen Umstand wäre es für den menschlichen Geist, der meistens mit

Gleichnissen und Analogieschlüssen arbeitet, unendlich viel schwieriger, ihren Gesetzen näher auf die Spur zu kommen. —

Ehe wir nun zu fruchtbaren Anwendungen der dynamischen Gleichungen (83) schreiten können, müssen wir noch die Beziehungen kennen, welche zwischen Druck und Deformation bestehen, und die Frage nach diesen Beziehungen führt uns mit Notwendigkeit zu derjenigen nach dem Material des betrachteten Körpers, das wir bisher ganz unberücksichtigt lassen konnten. Davon wird also in den folgenden Abschnitten in erster Linie die Rede sein müssen.

Zweiter Teil.

Unendlich kleine Deformationen.

Erstes Kapitel. Feste Körper. Allgemeines.

§ 21. Wie wir im ersten Teil gesehen haben, fehlt uns zur eindeutigen Formulierung der Bewegungsgesetze deformierbarer Körper nur noch die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen dem Deformationstensor und dem Drucktensor. Um nun diesen Zusammenhang festzulegen, führen wir vor allem die Hypothese ein, die wir zunächst auch überall im Folgenden beibehalten werden, daß der Druck immer und überall einzig und allein abhängt von der gleichzeitigen und lokalen Deformation und umgekehrt, — eine Voraussetzung, die in der Natur keineswegs immer erfüllt ist; denn genau genommen zeigen alle festen Körper in höherem oder geringerem Grade eine Abhängigkeit ihrer Deformation außer von den augenblicklichen Kräften auch noch von der Art der Behandlung, der sie vorher unterworfen waren, ferner auch von der Temperatur, welche sich im allgemeinen ganz unabhängig von Druck und Deformation ändern kann. Wenn und insoweit für einen Körper die von uns eingeführte Hypothese zutrifft, nennen wir ihn „vollkommen elastisch".

Zur Bedingung der vollkommenen Elastizität gehört es natürlich auch, daß ein Körper, der eine Zeitlang beliebigen deformierenden Kräften ausgesetzt worden ist, nach Aufhören dieser Kräfte keinen andern Gleichgewichtszustand annimmt, als denjenigen, welchen er vor der Anbringung der Kräfte besessen hat; denn dem Drucke Null muß eindeutig die Deformation Null entsprechen. Wenn also ein Körper die Erscheinung der elastischen Nachwirkung zeigt, d. h. wenn er nach Aufhören der deformierenden Kräfte erst allmählich in seinen alten Gleichgewichtszustand zurückkehrt, verhält er sich nicht vollkommen elastisch. Dagegen spielt die Größe der durch einen bestimmten Druck bewirkten Deformation bei der

Frage nach der vollkommenen Elastizität keine Rolle. In diesem Punkte weicht die wissenschaftliche Terminologie etwas ab von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, da man im täglichen Leben mit dem Begriff der hervorragenden Elastizität auch den einer besonders großen Deformierbarkeit verbindet und in diesem Sinne z. B. Kautschuk elastischer als Glas nennt. Im wissenschaftlichen Sinne ist umgekehrt Glas elastischer als Kautschuk, insofern es die Eigenschaft der elastischen Nachwirkung lange nicht in dem Grade zeigt wie letzterer.

Nach allen Erfahrungen darf man einen jeden Körper als vollkommen elastisch betrachten, falls seine Deformation eine gewisse Größe nicht überschreitet, welche als die „Grenze der vollkommenen Elastizität" bezeichnet wird. Unsere folgenden Untersuchungen beziehen sich daher auf alle Körper, aber nur auf solche Deformationen, welche so klein sind, daß sie innerhalb der Elastizitätsgrenze liegen. Um die mathematische Behandlung derselben zu vereinfachen, nehmen wir die Deformationen als unendlich klein an.

§ 22. Ein Körper, in welchem alle Richtungen physikalisch gleichwertig sind, heißt „isotrop"; dagegen wird ein Körper, in welchem sich irgendwelche Richtungen physikalisch verschieden verhalten, als „anisotrop" bezeichnet. Für isotrope Körper läßt sich gleich von vornherein ein Zusammenhang zwischen Deformation und Druck angeben: da nämlich der Druck durch die Deformation vollständig bestimmt ist, so müssen bei jeder beliebigen Deformation die Hauptachsen des Drucktensors zusammenfallen mit denen des Deformationstensors. Bei anisotropen Körpern kann man aber diesen Schluß nicht ziehen, weil hier auch noch gewisse Vorzugsrichtungen des Körpers eine Rolle spielen werden. Da wir unsere folgenden Betrachtungen auch auf Kristalle, also auch auf anisotrope Körper erstrecken wollen, so müssen wir, um vorwärts zu kommen, einen allgemeineren Weg einschlagen.

Der Deformationstensor wird charakterisiert durch seine sechs Komponenten x_x, x_y, $\cdots$ (§ 12), der Drucktensor durch seine sechs Komponenten X_x, X_y, $\cdots$ (§ 19), und die letzteren Größen sind bestimmte Funktionen der ersteren Größen. Da nun die Deformationskomponenten unendlich klein sind, so kann man in der Taylorschen Reihenentwicklung bei den ersten Gliedern stehen bleiben und erhält als Resultat, daß die Druckkomponenten lineäre Funktionen der Deformationskomponenten sind und, wie wir gleich hinzufügen können, homogene Funktionen, da wir die Deforma-

tionen von demjenigen Zustand aus rechnen wollen, welcher dem Drucke Null entspricht, d. h. von dem „natürlichen" Zustand des Körpers aus. Dann verschwinden die Druckkomponenten zugleich mit den Deformationskomponenten.

Ordnen wir also den Deformationskomponenten in der Reihenfolge x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu, und die nämlichen Ziffern den Druckkomponenten in der Reihenfolge X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, so ergeben sich als allgemeiner Ausdruck der Abhängigkeit des Druckes von der Deformation die sechs Gleichungen:

$$(88)\quad \begin{cases} X_x = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y \\ Y_y = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

in welchen die 36 Konstanten a durch die materielle Beschaffenheit des Körpers bestimmt sind. Diese Ausdrücke in die Bewegungsgleichungen (83) eingesetzt liefern dann die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

Es fragt sich nun noch, ob die Konstanten a gänzlich unabhängig voneinander sind, oder ob nicht zwischen ihnen gewisse Beziehungen bestehen, durch deren Einführung die Gleichungen (88) sich vereinfachen. Daß beim Vorhandensein irgendwelcher Symmetrien in der Struktur eines Kristalls eine Spezialisierung und Vereinfachung insofern eintreten wird, als die Anzahl der Konstanten a sich auf eine geringere als 36 reduziert, ist unmittelbar einleuchtend. Wir wollen aber einstweilen noch bei dem allgemeinen Fall eines vollständig unsymmetrischen Kristalls stehen bleiben, um diesen einer Bedingung zu unterwerfen, die wir bisher noch nicht eingeführt hatten, von der wir aber doch wissen, daß sie in der Natur stets erfüllt ist: dem Gesetz der Erhaltung der Energie; und wir werden sehen, daß die Einführung dieses Gesetzes eine allgemeine beträchtliche Vereinfachung des Gleichungensystems (88) im Gefolge hat.

§ 23. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie (I. (393)) ist die in einem Zeitelement dt erfolgende Änderung der Gesamtenergie $L + U$ eines materiellen Systems gleich der währenddem von den äußern Kräften an dem System geleisteten Arbeit:

$$(89)\qquad d(L + U) = A.$$

Wir wollen nun diese Gleichung auf den vorliegenden Fall anwenden, indem wir, ganz wie oben in § 15, einen beliebigen

Teil des ganzen Körpers herausgreifen und ihn als materielles System der Betrachtung zugrunde legen.

Was zunächst den ersten Teil der Energie, die lebendige Kraft L betrifft, so ist dieselbe einfach die Summe der lebendigen Kräfte aller Massenelemente $k \cdot d\tau$ des betrachteten Körperteils, also:

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \right\} \cdot k \, d\tau, \tag{90}$$

wo u, v, w die Komponenten der Verschiebung eines materiellen Punktes aus seiner natürlichen Lage bedeuten, und die Integration über den betrachteten Körperteil zu erstrecken ist.

Von dem zweiten Teil der Energie, der potentiellen Energie U, wissen wir, daß sie sich ebenfalls durch Addition zusammensetzt aus den potentiellen Energien der einzelnen Massenelemente, sie wird also die Form besitzen:

$$U = \int F \cdot d\tau, \tag{91}$$

wo die Funktion F, die potentielle Energie der Volumeneinheit, wegen der vollkommenen Elastizität des Körpers lediglich von dem Deformationszustand des betreffenden Volumenelements, also von den 6 Deformationskomponenten x_x, y_y, $\cdots$ abhängt. Da es bei der potentiellen Energie nur auf ihre Änderungen, nicht auf ihren absoluten Wert ankommt, so wollen wir, ohne damit die Allgemeinheit zu beschränken, für den natürlichen, deformationslosen Zustand des Körpers $F = 0$ setzen.

Was endlich die äußere Arbeit A betrifft, so besteht diese nach § 14 einmal aus der Arbeit der Massenkräfte, welche auf alle Elemente des betrachteten Körperteils wirken, und außerdem aus der Arbeit der Druckkräfte, welche von außen auf die Punkte der Oberfläche des betrachteten Körperteils wirken, also:

$$A = \int (X du + Y dv + Z dw) k \, d\tau + \int (X_\nu du + Y_\nu dv + Z_\nu dw) \, d\sigma, \tag{92}$$

wo das erste Integral über das Volumen, das zweite Integral über die Oberfläche des Körperteils zu erstrecken ist.

Um nun die Forderung (89) des Energieprinzips zu verwerten, bilden wir zunächst den Ausdruck von dL. Da die Masse $k \, d\tau$ nicht von der Zeit abhängt, so können wir aus (90) direkt ableiten:

$$dL = \int \left(\frac{d^2u}{dt^2} du + \frac{d^2v}{dt^2} dv + \frac{d^2w}{dt^2} dw \right) k \, d\tau,$$

oder, wenn wir für die drei Beschleunigungskomponenten ihre Werte aus den Bewegungsgleichungen (83) einsetzen:

$$dL = \int (X\,du + Y\,dv + Z\,dw)\,k\,d\tau \tag{93}$$
$$- \int d\tau \cdot \begin{Vmatrix} du\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \\ + dv\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \\ + dw\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) \end{Vmatrix}.$$

Machen wir jetzt von der Transformationsformel (79) Gebrauch, und zwar für jedes einzelne der neun Raumintegrale, in welche das zweite Raumintegral zerfällt, so erhalten wir, mit gleichzeitiger Berücksichtigung von (74):

$$dL = \int (X\,du + Y\,dv + Z\,dw) k\,d\tau \tag{94}$$
$$+ \int d\tau \cdot \begin{Vmatrix} X_x \frac{\partial du}{\partial x} + X_y \frac{\partial du}{\partial y} + X_z \frac{\partial du}{\partial z} \\ + Y_x \frac{\partial dv}{\partial x} + Y_y \frac{\partial dv}{\partial y} + Y_z \frac{\partial dv}{\partial z} \\ + Z_x \frac{\partial dw}{\partial x} + Z_y \frac{\partial dw}{\partial y} + Z_z \frac{\partial dw}{\partial z} \end{Vmatrix}$$
$$+ \int d\sigma \cdot (X_\nu du + Y_\nu dv + Z_\nu dw).$$

Dieser Ausdruck für dL, in die Energiegleichung (89) eingesetzt, bewirkt insofern eine bedeutende Vereinfachung derselben, als das von der äußeren Arbeit A herrührende, durch (92) dargestellte Glied der rechten Seite sich gegen das gleiche der linken Seite forthebt. Dann bleibt in der Energiegleichung nur noch übrig die potentielle Energie dU und das zweite Raumintegral in (94). Das letztere können wir noch einfacher schreiben. Zunächst ist nämlich zu bedenken, daß in den Ausdrücken $\frac{\partial du}{\partial x}$ usw. die Zeichen ∂ sich auf die räumliche Differentiation, die Zeichen d dagegen auf die zeitliche Differentiation beziehen, daß also diese beiden Operationen ganz unabhängig voneinander sind. Daher haben wir:

$$\frac{\partial du}{\partial x} = d\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial du}{\partial y} = d\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{usw.}$$

Benutzen wir ferner die Beziehungen (84) und die Abkürzungen (60), so stellt sich schließlich die Energiegleichung in der Form dar:

$$dU + \int (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y) d\tau = 0. \tag{95}$$

Hier können wir nach (91) für die Änderung der potentiellen Energie schreiben:

$$dU = \int dF \cdot d\tau. \tag{96}$$

Streng genommen müßte hier allerdings noch ein Glied hinzugefügt werden, welches von der zeitlichen Änderung der Größe des Volumenelements $d\tau$ herrührt, nämlich das Glied $\int F\, d(d\tau)$, wo das erste d der zeitlichen, das zweite d der räumlichen Änderung entspricht. Aber dieses Glied ist deshalb zu vernachlässigen, weil bei unendlich kleinen Deformationen die zeitlichen Änderungen eines Volumenelements, auch für endliche Zeiten, unendlich klein sind gegen die Größe des Volumenelements, während dagegen die zeitlichen Änderungen der potentiellen Energie F von derselben Größenordnung sind wie die Größe dieser Energie.

Mit Benutzung von (96) läßt sich der Ausdruck (95) als ein einziges Raumintegral schreiben, zu erstrecken über das Volumen des betrachteten Körperteils. Nehmen wir nun den Körperteil unendlich klein, als ein einziges Volumenelement $d\tau$, so kann das Integralzeichen fortbleiben, und wir erhalten für jedes einzelne Körperelement:

$$-dF = X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y.$$

Da aber andererseits F durch die sechs Deformationskomponenten bestimmt ist, so hat man:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial F}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial F}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial F}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial F}{\partial z_x} dz_x + \frac{\partial F}{\partial x_y} dx_y,$$

und da die Deformationskomponenten und ihre Änderungen unabhängig voneinander sind, so gilt allgemein:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, \quad Z_z = -\frac{\partial F}{\partial z_z}, \\ Y_z &= -\frac{\partial F}{\partial y_z}, \quad Z_x = -\frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

d. h. die Komponenten des Drucktensors sind die negativen Abgeleiteten einer einzigen Funktion der Deformationskomponenten nach diesen, genau ebenso wie bei Zentralkräften die Kraftkomponenten die negativen Abgeleiteten einer einzigen Funktion der Koordinaten, des Potentials, nach diesen sind (I. (107)). Daher heißt die potentielle Energie F der Volumeneinheit auch das elastische Potential.

Nach (88) ist das elastische Potential eine quadratische Funktion der Deformationskomponenten, und zwar eine homogene Funktion, da nicht nur die linearen, sondern nach der von uns oben gemachten Voraussetzung auch das absolute Glied verschwindet.

§ 24. Nach den gewonnenen Ergebnissen ist der allgemeine Ausdruck des elastischen Potentials von der Form:

$$
\begin{aligned}
(98)\quad F = {} & \tfrac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12} x_x y_y + a_{13} x_x z_z + a_{14} x_x y_z + a_{15} x_x z_x + a_{16} x_x x_y \\
& + \tfrac{a_{22}}{2} y_y^2 + a_{23} y_y z_z + a_{24} y_y y_z + a_{25} y_y z_x + a_{26} y_y x_y \\
& + \tfrac{a_{33}}{2} z_z^2 + a_{34} z_z y_z + a_{35} z_z z_x + a_{36} z_z x_y \\
& + \tfrac{a_{44}}{2} y_z^2 + a_{45} y_z z_x + a_{46} y_z x_y \\
& + \tfrac{a_{55}}{2} z_x^2 + a_{56} z_x x_y \\
& + \tfrac{a_{66}}{2} x_y^2 .
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich dann nach (97) die sechs Druckkomponenten als lineare homogene Funktionen der Deformationskomponenten ganz wie oben in (88), nur mit dem Unterschiede, daß jetzt $a_{12} = a_{21}$, usw. Mit anderen Worten: Die Existenz eines elastischen Potentials ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß in den Elastizitätskonstanten a_{ij} die beiden Indizes i und j vertauschbar sind. Dadurch tritt gegenüber der allgemeinen, in § 22 entwickelten Theorie die erhebliche Vereinfachung ein, daß das elastische Verhalten eines Körpers nicht mehr von 36, sondern nur noch von 21 Konstanten abhängt. Über diese Konstanten läßt sich von vorneherein, ohne auf die speziellen Eigenschaften des Körpers einzugehen, nur noch eine bestimmte Aussage machen, nämlich die, daß sie die Bedingung erfüllen, das Potential F unter allen Umständen positiv zu machen. Denn das elastische Potential ist die potentielle Energie der Deformation, und diese besitzt die Eigenschaft, sich beim Übergang des Körpers aus dem deformierten in den natürlichen Zustand, also

beim Übergang des Potentials vom Werte F in den Wert Null, in kinetische, also positive Energie zu verwandeln, was notwendig erfordert, daß sie selber positiv ist. Diese Überlegung bildet eine Anwendung des allgemeinen Satzes, daß einem stabilen Gleichgewichtszustand stets ein Minimum der potentiellen Energie entspricht (I. § 105). Da nun der natürliche, deformationslose Zustand des Körpers einen stabilen Gleichgewichtszustand darstellt, so ist die potentielle Energie in jedem Deformationszustand größer als die im natürlichen Zustand, d. h. größer als Null.

Daraus ist weiter zu schließen, daß die sechs Konstanten $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{66}$ sämtlich positiv sind. Denn wäre z. B. a_{11} negativ, so brauchte man nur x_x von Null verschieden und alle anderen Deformationskomponenten gleich Null anzunehmen, um ein negatives Potential zu erhalten. Aber auch die übrigen Konstanten a müssen gewissen Ungleichungen genügen, auf deren nähere Formulierung wir jedoch hier nicht näher eingehen wollen.

§ 25. In der Praxis handelt es sich gewöhnlich darum, bei gegebenen äußeren Druckkräften die durch sie bewirkte Veränderung des Körpers zu finden. Da erhebt sich zuerst die wichtige Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe, d. h. die Frage, ob gegebenen äußeren Druckkräften eine ganz bestimmte Veränderung des Körpers entspricht, oder ob mehrere verschiedenartige Veränderungen mit den Gleichungen des Problems verträglich sind. Das wollen wir zunächst untersuchen. Dabei wollen wir uns auf den Fall des Gleichgewichts beschränken.

Wir setzen also jetzt die von außen auf die Oberfläche des Körpers wirkenden Drucke X_ν, Y_ν, Z_ν und ebenso die Massenkräfte X, Y, Z als gegeben voraus und nehmen an, es seien drei Funktionen u, v, w von x, y, z gefunden, welche, als Verschiebungen der Punkte x, y, z des Körpers betrachtet, allen Bedingungen des Gleichgewichts genügen, nämlich sowohl den Gleichungen (83) für das Innere:

$$\left.\begin{aligned} Xk &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ Yk &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Zk &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

als auch den Gleichungen (74) für die Oberfläche. In allen diesen Gleichungen sind für die Druckkomponenten $X_x, \cdots$ diejenigen

Werte zu setzen, welche sich aus den Ausdrücken der Verschiebungen u, v, w berechnen, wenn man zunächst nach (60) die ihnen entsprechenden Deformationskomponenten und dann nach (97) die Druckkomponenten bildet.

Nun wollen wir weiter annehmen, es existieren noch drei andere, von den vorigen verschiedene Funktionen u', v', w' von x, y, z, welche ebenfalls allen Bedingungen des Gleichgewichts Genüge leisten; dann gelten die nämlichen Gleichungen (99) und (74) auch für diejenigen Druckkomponenten X_x', X_y', $\cdots$, welche man erhält, wenn man aus u', v', w' statt aus u, v, w nach (60) die Deformationskomponenten x_x', y_y', $\cdots$ berechnet und diese Werte in (97) einsetzt.

Betrachten wir nun die Funktionen:

$$u_0 = u' - u, \quad v_0 = v' - v, \quad w_0 = w' - w \tag{100}$$

von x, y, z, und untersuchen wir diejenige Veränderung des Körpers, welche sie, als Verschiebungskomponenten betrachtet, darstellen. Zunächst ergeben sich daraus nach (60) die Deformationskomponenten:

$$x_{x_0} = x_x' - x_x, \quad x_{y_0} = x_y' - x_y, \cdots \tag{101}$$

und weiter nach (97) die Druckkomponenten:

$$X_{x_0} = X_x' - X_x, \quad X_{y_0} = X_y' - X_y, \cdots \tag{102}$$

Andrerseits folgt durch Subtraktion der Gleichungen (99) für die ungestrichenen Druckkomponenten von den nämlichen Gleichungen (99) für die gestrichenen Druckkomponenten, wenn man noch beachtet, daß die gegebenen Massenkräfte X, Y, Z in beiden Gleichungssystemen dieselben sind:

$$0 = \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y_0}}{\partial y} + \frac{\partial X_{z_0}}{\partial x}, \cdots \tag{103}$$

und endlich für die Oberfläche des Körpers, durch Subtraktion der ungestrichenen von den gestrichenen Gleichungen (74), da die gegebenen Oberflächendrucke X_ν, Y_ν, Z_ν jedesmal die nämlichen sind:

$$0 = X_{x_0}\cos(\nu x) + X_{y_0}\cos(\nu y) + X_{z_0}\cos(\nu z), \cdots. \tag{104}$$

Hier könnte das Bedenken auftauchen, ob man bei dieser Subtraktion die Werte der Richtungscos in beiden Gleichungssystemen als gleich betrachten darf, da doch die Form der Oberfläche des Körpers bei den beiden Veränderungen verschieden sein wird. In-

dessen man überzeugt sich leicht, daß der hierdurch begangene Fehler von kleinerer Größenordnung ist. Denn die Richtungscos der Normalen eines Oberflächenelements sind endlich, ihre Werte weichen also bei irgendeiner unendlich kleinen Veränderung des Körpers nur verhältnismäßig unendlich wenig von denjenigen Werten ab, die sie in dem natürlichen Zustand des Körpers besitzen, während dagegen die Druckkomponenten $X_x, \cdots$ sich bei den beiden Veränderungen um Beträge unterscheiden, welche gegen die Werte der Druckkomponenten selber beträchtlich sind.

Die Gleichungen (103) und (104) haben eine physikalisch sehr anschauliche Bedeutung. Sie sprechen nämlich die Bedingungen für eine Veränderung u_0, v_0, w_0 aus, bei der weder auf die Massenelemente noch auf die Oberfläche des Körpers äußere Kräfte wirken. Dadurch ist die aufgeworfene Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung für u, v, w bei gegebenen äußeren Kräften zurückgeführt auf die einfachere Frage, ob beim Fehlen jeglicher äußerer Einwirkung eine von Null verschiedene Veränderung $u_0 v_0 w_0$ des Körpers möglich ist.

Die Antwort darauf können wir durch folgende Überlegung finden. Multipliziert man die drei Gleichungen (103) der Reihe nach mit u_0, v_0, w_0, addiert, multipliziert mit dem Volumenelement $d\tau$, und integriert endlich über den ganzen Körper, so erhält man eine Gleichung mit neun Raumintegralen, deren jedes sich nach (79) in folgender Weise umformen läßt:

$$\int u_0 \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot X_{x_0} \cdot d\tau - \int u_0 X_{x_0} \cos(\nu x) d\sigma .$$

Dadurch geht die Gleichung, mit Rücksicht auf (104), über in:

$$\int (X_{x_0} x_{x_0} + Y_{y_0} y_{y_0} + Z_{z_0} z_{z_0} + Y_{z_0} y_{z_0} + Z_{z_0} z_{x_0} + X_{y_0} x_{y_0}) d\tau = 0,$$

oder, wenn man für die Druckkomponenten ihre Werte aus (97) einsetzt:

$$\int F_0 \cdot d\tau = 0,$$

wobei F_0 den Ausdruck (98) bedeutet, falls man darin alle Deformationskomponenten mit dem Index Null versieht. Nun ist F_0 stets positiv, nur im Grenzfall, bei verschwindender Deformationsenergie, Null, also folgt aus der letzten Gleichung, daß F_0 für jedes einzelne Volumenelement verschwindet, und daraus, daß alle Deformationskomponenten $x_{x_0}, x_{y_0}, \cdots$ einzeln gleich Null sind.

Mit anderen Worten: Wenn keinerlei äußere Kräfte auf den Körper wirken, so ist die Deformation notwendig gleich Null.

Es fragt sich nun noch, ob dann auch die Veränderung u_0, v_0, w_0 verschwindet. Um dies zu entscheiden, müssen wir untersuchen, ob mit dem Verschwinden der sechs Deformationskomponenten:

$$(105)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, & \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, & \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

auch die Verschiebungskomponenten u_0, v_0, w_0 notwendig gleich Null werden. Das ist, wie man leicht sieht, keineswegs der Fall. Vielmehr ergeben sich u_0, v_0, w_0, die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (105), in folgender Weise. Für u_0 gelten die drei Bedingungen:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0,$$

von denen die beiden letzten sich durch Differentiation der Gleichungen ergeben, welche $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ und $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ enthalten. Also ist u_0 von der Form:

$$(106)\quad \left\{ \begin{array}{ll} & u_0 = \lambda + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda' yz, \\ \text{ebenso:} & v_0 = \mu + \mu_1 x + \mu_3 z + \mu' xz, \\ & w_0 = \nu + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu' xy, \end{array} \right.$$

wobei die zwölf Koeffizienten λ, μ, ν konstant sind. Weiter ist nach (105):

$$\begin{aligned} \mu_3 + \mu' x + \nu_2 + \nu' x &= 0, \\ \nu_1 + \nu' y + \lambda_3 + \lambda' y &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda' z + \mu_1 + \mu' z &= 0. \end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned} \lambda' = 0, \qquad \mu' = 0, \qquad \nu' = 0, \\ \nu_2 + \mu_3 = 0, \quad \lambda_3 + \nu_1 = 0, \quad \mu_1 + \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Mit diesen sechs Bedingungen werden die Ausdrücke (106) völlig identisch mit den Ausdrücken (39) für die allgemeinste unendlich kleine Veränderung, die ein Körper ausführen kann, ohne eine Deformation zu erleiden, d. h. für eine Translation und eine Rotation, — ein Ergebnis, das unmittelbar einleuchtend ist und

vorauszusehen war. Wir können daher jetzt folgenden Satz aussprechen: Durch die auf das Innere und auf die Oberfläche des Körpers wirkenden äußeren Kräfte sind zwar die Verschiebungskomponenten u, v, w nicht eindeutig bestimmt, aber die durch die verschiedenen Lösungen der Aufgabe dargestellten Veränderungen des Körpers unterscheiden sich voneinander nur um Translationen und Drehungen des ganzen Körpers, sie entsprechen also alle der nämlichen Deformation, und insofern kann man sagen, daß das Gleichgewichtsproblem durch die aufgestellten Gleichungen eindeutig gelöst wird. Die unbestimmt bleibenden sechs Konstanten werden wir später, bei der Behandlung derartiger Aufgaben, ganz beliebig wählen, da sie uns nicht weiter interessieren.

§ 26. Körper mit symmetrischer Struktur. Kristallsysteme. Die 21 Konstanten, von denen das elastische Verhalten eines homogenen Kristalls abhängt, lassen sich bequem übersehen, wenn man sie in folgendes Schema bringt:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66}. \end{array}\right\} \quad (107)$$

Die Werte der einzelnen Konstanten a hängen aber nicht allein ab von der Beschaffenheit des Kristalls, sondern außerdem im allgemeinen auch noch von der Wahl des Koordinatensystems, nämlich von der Orientierung der Koordinatenachsen gegenüber den Richtungen, welche in der Struktur des Kristalls eine ausgezeichnete Rolle spielen. Das folgt unmittelbar aus der Überlegung, daß der Wert des elastischen Potentials F, also der elastischen Energie, unmöglich von der Wahl der Koordinaten abhängen kann. Transformiert man also irgendeine Deformation $x_x, x_y, \cdots$ auf ein anderes Koordinatensystem $x'y'z'$, und bezeichnet die neuen Deformationskomponenten durch einen beigefügten Strich, so ist nach (98):

$$\frac{a_{11}}{2} x_w^2 + a_{12} x_x y_y + \cdots \equiv \frac{a'_{11}}{2} x_x'^2 + a'_{12} x_x' y_y' + \cdots \quad (108)$$

und aus dieser Identität findet man, wenn die gestrichenen Deformationskomponenten durch die ungestrichenen ausgedrückt werden, durch Gleichsetzen der einzelnen entsprechenden Glieder auf beiden

Seiten die Relationen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Konstanten, welche den Beziehungen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinaten entsprechen. Im allgemeinen werden die gestrichenen Konstanten a' von den ungestrichenen a sämtlich oder teilweise verschieden sein.

Wenn nun der Kristall die spezielle Eigenschaft besitzt, daß für eine bestimmte Änderung des Koordinatensystems sämtliche a' den entsprechenden a gleich sind, d. h. wenn die Konstanten a gegenüber der Koordinatenänderung invariant sind, so sagt man, daß dem Kristall eine bestimmte Art von Symmetrie eigen ist. Gibt es mehrere derartige Koordinatenänderungen, so ist die Symmetrie des Kristalls eine höhere.

Man kann jede Art von Symmetriebedingung, anstatt durch die Invarianz der Elastizitätskonstanten a gegenüber der betreffenden Koordinatentransformation, noch auf eine andere Weise aussprechen, indem man nämlich das ursprüngliche Koordinatensystem beibehält, dafür aber den Kristall einer derartigen Veränderung unterwirft, daß er schließlich zu dem ursprünglichen Koordinatensystem ebenso orientiert ist, wie er nach der ersten Betrachtungsweise, wo er in Ruhe blieb, zu dem gestrichenen Koordinatensystem orientiert war. Das Vorhandensein der Symmetrie gibt sich dann dadurch zu erkennen, daß der Kristall nach Ausführung der Veränderung sich nach allen Richtungen ebenso verhält wie vor derselben, oder daß er, wie man sagt, durch die Veränderung mit sich selber zur Deckung gebracht wird. Beide Arten von Definitionen der Symmetrie sind offenbar vollkommen äquivalent, und nur verschiedene Formen derselben Sache. Für unsere Zwecke ist die erstere Formulierung, die Bedingung der Invarianz von a bei Koordinatentransformation, bequemer; wir wollen sie daher auch weiterhin benutzen.

Je nach dem Grade der Symmetrie, die sie aufweisen, teilt man die Kristalle in verschiedene Klassen ein. Das Prinzip dieser Einteilung ist nach dem Gesagten nicht ein von vornherein feststehendes, durch Deduktionen eindeutig bestimmbares, sondern, wie jede Begriffsbestimmung, bis zu einem gewissen Grade willkürlich, und nur durch Zweckmäßigkeitsbetrachtungen abzuleiten. Wir werden uns hier der einfachen seit langer Zeit gebräuchlichen Einteilung in die sechs Kristallsysteme bedienen, und verwenden dazu als Koordinatentransformation am zweckmäßigsten eine Drehung des Koordinatensystems.

Wenn die Elastizitätskonstanten a eines Kristalls sämtlich invariant sind gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems um eine Koordinatenachse vom Winkel $\frac{2\pi}{n}$ (oder: wenn der Kristall durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ mit sich selber zur Deckung gebracht wird), so nennt man diese Achse eine „$n$zählige Symmetrieachse" des Kristalls.

Selbstverständlich ist eine Symmetrieachse nicht eine bestimmte Gerade, sondern nur eine bestimmte Richtung, da alle parallelen Geraden vollkommen gleichwertig sind.

Die Existenz einer einzähligen Symmetrieachse ist gar keine wirkliche Symmetriebedingung, da eine Drehung um den Winkel 2π das Koordinatensystem überhaupt nicht verändert. Die Kristalle, die nur einzählige Symmetrieachsen besitzen, bilden das letzte, sechste oder asymmetrische (trikline) System. Zu ihnen gehört z. B. Kupfersulfat. Ihr elastisches Verhalten hängt von 21 Konstanten ab, wie durch das Schema (107) dargestellt ist.

Wenn ein Kristall keine höhere Symmetrie als eine einzige 2zählige Symmetrieachse besitzt, so gehört er zum fünften oder monosymmetrischen (monoklinen) System, wie z. B. Glimmer oder kohlensaures Natron. Um die Bedingungen für das elastische Verhalten der Kristalle dieses Systems aufzustellen, fragen wir zuerst allgemein nach dem Zusammenhang der gestrichenen und der ungestrichenen Elastizitätskonstanten a bei einer Drehung des Koordinatensystems vom Winkel $\frac{2\pi}{2} = \pi$ um die z-Achse. Hierfür ergibt sich:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Entsprechend:

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w.$$

und nach (60):

$$x_x' = x_x, \quad y_y' = y_y, \quad z_z' = z_z,$$
$$y_z' = -y_z, \quad z_x' = -z_x, \quad x_y' = x_y.$$

Setzt man diese Werte in die Identität (108) ein, so folgt, daß von den 21 Konstanten a' 13 gleich sind den gleichnamigen ungestrichenen a, während dagegen:

$$a_{14}' = -a_{14}, \quad a_{15}' = -a_{15}, \quad a_{24}' = -a_{24}, \quad a_{25}' = -a_{25},$$
$$a_{34}' = -a_{34}, \quad a_{35}' = -a_{35}, \quad a_{46}' = -a_{46}, \quad a_{56}' = -a_{56}.$$

Diese Beziehungen gelten ganz allgemein für jeden Kristall. Ist nun die z-Achse eine zweizählige Symmetrieachse, so sind sämtliche Größen a invariant, und deshalb müssen alle diejenigen von ihnen, welche ihr Vorzeichen bei der Transformation wechseln, verschwinden. Daraus folgt für das elastische Verhalten eines monosymmetrischen Kristalls nach (107) das Schema:

(109)
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66}. \end{matrix}$$

Wenn außer der z-Achse noch eine zweite Koordinatenachse, etwa die x-Achse, zweizählige Symmetrieachse ist, so gelangen wir zum vierten oder rhombischen System, zu dessen Vertretern Kalisalpeter, Aragonit, Topas gehören. Ihm entspricht, wie man auf dem nämlichen Wege findet, das Schema:

(110)
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66}, \end{matrix}$$

an dessem Bau man sofort ersieht, daß in diesem Fall auch die dritte Koordinatenachse, also die y-Achse, zweizählige Symmetrieachse ist.

Von dem rhombischen System gelangen wir zum dritten oder tetragonalen (quadratischen) System (z. B. Zirkonium), wenn wir die weitere Bedingung einführen, daß eine der Koordinatenachsen, etwa die z-Achse, eine vierzählige Symmetrieachse ist. Für eine Drehung vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse gelten die Transformationsformeln:

$$\begin{matrix} x' = y, & y' = -x, & z' = z, \\ u' = v, & v' = -u, & w' = w, \\ x_x' = y_y, & y_y' = x_x, & z_z' = z_z, \\ y_z' = -x_z, & z_x' = z_y, & x_y' = -x_y. \end{matrix}$$

Dies ergibt nach (108) für die neun Konstanten des rhombischen Systems die allgemeinen Beziehungen:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{22}, & a'_{12} &= a_{12}, & a'_{13} &= a_{23}, \\ a'_{22} &= a_{11}, & a'_{23} &= a_{13}, & a'_{33} &= a_{33}, \\ a'_{44} &= a_{55}, & a'_{55} &= a_{44}, & a'_{66} &= a_{66}. \end{aligned}$$

Sollen nun die gestrichenen a sämtlich gleich den entsprechenden ungestrichenen sein, so folgt:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23}, \quad a_{44} = a_{55},$$

und daraus nach (98) für das elastische Potential eines tetragonalen Kristalls:

$$F = \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2) + a_{12}x_x y_y + a_{13}(x_x + y_y)z_z + \frac{a_{33}}{2}z_z^2 + \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2) + \frac{a_{66}}{2}x_y^2. \tag{111}$$

Die Existenz einer dreizähligen oder auch einer sechszähligen Symmetrieachse bedingt das zweite oder hexagonale System, welches durch zahlreiche Kristalle wie Natronsalpeter, Kalkspat, Graphit, Turmalin, Eis repräsentiert wird.

Das erste oder reguläre System endlich geht aus dem tetragonalen System hervor, wenn auch eine zweite Koordinatenachse, und infolgedessen auch die dritte Achse, vierzählige Symmetrieachse ist. Der Ausdruck für das elastische Potential eines regulären Kristalls ergibt sich nach (111) als:

$$F = \frac{a_{11}}{2}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + a_{12}(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + \frac{a_{44}}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2), \tag{112}$$

er hängt also noch von drei Konstanten ab. Zum regulären System gehören u. a. Steinsalz, Flußspat, Diamant.

§ 27. Isotrope Körper. Damit ein Körper elastisch isotrop ist, d. h. überhaupt keine Vorzugsrichtungen besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß seine Elastizitätskonstanten gegenüber jeder Änderung des Koordinatensystems sämtlich invariant sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß er durch jede beliebige Drehung mit sich selber zur Deckung gebracht wird. Um die daraus folgenden Bedingungen für die Werte der Elastizitätskonstanten festzustellen, beziehen wir am einfachsten die Deformation auf die Hauptdilatationen und die Richtungen der Hauptdilatationsachsen, d. h. wir führen die sechs Deformationskomponenten $x_x, y_y, \cdots$ nach

den Gleichungen (64) zurück auf die drei Hauptdilatationen l, m, n und die neun Richtungscos der Hauptdilatationsachsen $\alpha_1, \cdots \gamma_3$, und setzen diese Werte in den Ausdruck (112) des elastischen Potentials ein. In einem isotropen Körper muß derselbe vollständig bestimmt sein durch die Größen l, m, n, welches auch die Werte der Richtungscos sein mögen, und zwar bildet er offenbar eine symmetrische quadratische homogene Funktion von l, m, n.

Der Inhalt dieser Forderung läßt sich am bequemsten übersehen, wenn wir alle symmetrischen quadratischen homogenen Funktionen von l, m, n ins Auge fassen. Es gibt deren nur zwei voneinander unabhängige, nämlich:

$$l^2 + m^2 + n^2 \quad \text{und} \quad lm + mn + nl.$$

Auf diese beiden lassen sich alle anderen zurückführen. So ist z. B.:

$$(113) \qquad (l+m+n)^2 = (l^2+m^2+n^2) + 2(lm+mn+nl).$$

Daraus folgt, daß das elastische Potential eines isotropen Körpers nur zwei voneinander unabhängige Konstante besitzt, also etwa von der Form ist:

$$(114) \qquad F = \frac{\lambda}{2}(l+m+n)^2 + \mu(l^2+m^2+n^2),$$

wobei λ und μ positiv sind.

Um nun F durch die Deformationskomponenten $x_x, x_y, \cdots$ auszudrücken, bedenken wir, daß, da l, m, n die Wurzeln der kubischen Gleichung (62) sind:

$$(115) \qquad l + m + n = x_x + y_y + z_z,$$

als Koeffizient von l^2, und:

$$(116) \quad lm + mn + nl = (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) - \frac{1}{4}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$$

als Koeffizient von l in jener Gleichung. Daraus folgt nach (113):

$$l^2 + m^2 + n^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$$

(auch direkt durch (64) zu verifizieren) und nach (114):

$$(117) \quad F = \frac{\lambda}{2}(x_x + y_y + z_z)^2 + \mu\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_z^2 + x_x^2 + x_y^2}{2}\right).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung die Volumendilatation:

$$(118) \qquad x_x + y_y + z_z = \sigma,$$

so ergeben sich nach (97) für einen elastischen isotropen Körper

die Druckkomponenten in folgender Weise als bestimmt durch die Deformationskomponenten:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z, \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Diese Gleichungen bilden also die zu Beginn des ersten Kapitels, § 21, als notwendig bezeichnete Ergänzung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für einen elastischen isotropen Körper.

Zweites Kapitel. Gleichgewichtszustände fester Körper.

§ 28. Wir wollen nun zunächst einige Anwendungen der entwickelten Theorie auf statische Probleme für feste Körper machen, und beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf isotrope Körper. Da die Massenkräfte, wie die Schwere, bei Deformationen fester Körper in der Regel nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen, so lassen wir dieselben hier fort. Dann vereinfachen sich die im Innern geltenden Gleichgewichtsbedingungen (99) zu:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \cdots, \quad (120)$$

während die Bedingungen für die Oberfläche des Körpers unverändert wie in (74) lauten:

$$X_\nu = X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z), \cdots. \quad (121)$$

Jede Verschiebung u, v, w, deren aus (60) berechnete Deformationskomponenten $x_x, x_y, \cdots$ nach (119) zu Ausdrücken der Druckkomponenten $X_x, X_y, \cdots$ führen, welche die Gleichungen (120) befriedigen, stellt einen in der Natur möglichen Gleichgewichtszustand dar; dabei entspricht die betreffende Deformation denjenigen auf die Oberfläche des Körpers wirkenden Kräften, welche durch die Druckkomponenten X_ν, Y_ν, Z_ν in (121) dargestellt werden.

Hier ist nun von großer Wichtigkeit der in § 25 bewiesene Satz, daß die Deformation durch die äußeren Kräfte eindeutig bestimmt ist. Wenn wir also eine Lösung der Gleichgewichtsbedingungen gefunden haben, einerlei auf welchem Wege, so können wir sicher sein, daß sie die einzige Lösung ist, welche den betreffenden äußeren Druckkräften entspricht. In der Natur stellt sich nämlich gewöhnlich das Problem so, daß die äußeren Kräfte gegeben sind und daß nach der durch sie hervorgerufenen Deformation gefragt wird. Da ist es wegen des komplizierten Baues

der Gleichungen ganz unmöglich, die Aufgabe auf dem Wege zu bewältigen, daß man etwa zuerst die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (120) aufstellt und dann die darin auftretenden unbestimmten Konstanten aus den Grenzbedingungen (121) berechnet. Vielmehr geht man gewöhnlich besser von den Grenzbedingungen (121) aus und sucht dann durch Probieren eine partikuläre Lösung von (120) ausfindig zu machen, welche diesen Grenzbedingungen angepaßt ist. Wenn der Versuch gelingt, so hat man „die" Lösung der Aufgabe gefunden. Diese Methode werden wir im folgenden in der Regel benutzen.

§ 29. Betrachten wir zuerst die allseitig gleichförmige, sogenannte kubische Kompression eines Körpers von beliebiger Form. Dann wirkt auf die Oberfläche, überall in normaler Richtung, ein gegebener gleichmäßiger Druck p. Also ist:

$$(122)\quad X_\nu = p\cos(\nu x),\qquad Y_\nu = p\cos(\nu y),\qquad Z_\nu = p\cos(\nu z).$$

Das sind also die gegebenen äußeren Druckkomponenten. Wir befriedigen offenbar die Grenzbedingungen (121), wenn wir annehmen, daß an der Oberfläche des Körpers überall:

$$(123)\quad \begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = p, \\ X_y = Y_z = Z_x = 0. \end{cases}$$

Nun wollen wir weiter versuchsweise annehmen, daß diese sechs Gleichungen nicht nur an der Oberfläche, sondern im ganzen Innern die Werte der Druckkomponenten darstellen. Dann werden auch die Gleichungen (120) befriedigt, und weiter erhalten wir aus (119):

$$(124)\qquad p = -\lambda\sigma - 2\mu x_x,\ \cdots\ y_z = 0,\ \cdots,$$

woraus durch Addition der drei ersten Gleichungen folgt:

$$3p = -3\lambda\sigma - 2\mu(x_x + y_y + z_z)$$

und nach (118):

$$(125)\qquad \sigma = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu},\qquad x_x = y_y = z_z = \frac{\sigma}{3}.$$

Setzen wir also:

$$(126)\qquad u = \frac{\sigma}{3}x,\qquad v = \frac{\sigma}{3}y,\qquad w = \frac{\sigma}{3}z,$$

so wird nach (60) den Gleichungen (124) Genüge geleistet, und wir haben die Lösung der Aufgabe vor uns. Die Verallgemeinerung, welche dadurch erzielt werden kann, daß man in die Ausdrücke

von u, v, w noch gewisse weitere Konstante aufnimmt, ändert nach § 25 an der gefundenen Deformation nichts.

Ein allseitiger gleichförmiger Druck von der Größe p bewirkt also eine allseitige gleichförmige Volumenkontraktion von der Größe (125), unabhängig von der Form des Körpers. Daher heißt die Konstante $\frac{3}{3\lambda+2\mu}$ auch die „kubische Kompressibilität", und ihr reziproker Wert:

$$\frac{p}{-\sigma} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{127}$$

der „kubische Elastizitätsmodul" der Substanz.

§ 30. Nach der kubischen Elastizität betrachten wir die sogenannte lineäre Elastizität, d. h. wir untersuchen das Gleichgewicht eines einseitig, etwa in der Richtung der x-Achse, gespannten Körpers, dem wir, um die Rechnung nicht zu sehr zu komplizieren, die Gestalt eines der x-Achse parallelen Zylinders (Drahtes, Stabes), von der Länge l, mit beliebigem Querschnitt, geben wollen. Der Anfangsquerschnitt liege in der yz-Ebene, also $x = 0$, und werde dort durch irgendwelche Zwangskräfte festgehalten. Der Endquerschnitt, $x = l$, werde von einer äußeren Kraft von gegebener Größe F, in der Richtung der positiven x-Achse wirkend, angegriffen, während auf den Mantel des Zylinders keinerlei äußeren Kräfte wirken sollen. Wir fragen nach der eintretenden Deformation.

Um zunächst wieder die Oberflächenbedingungen (121) zu erfüllen, betrachten wir zuerst die Mantelfläche des Zylinders. Hier ist $X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0$, ferner ist $\cos(\nu x) = 0$, während $\cos(\nu y)$ und $\cos(\nu z)$ beliebige Werte haben können. Den Oberflächenbedingungen wird also genügt, wenn wir setzen:

$$X_y = Y_z = Z_x = 0, \quad Y_y = Z_z = 0. \tag{128}$$

Diese Werte wollen wir versuchsweise auch im ganzen Innern als gültig annehmen, so daß von den sechs Druckkomponenten nur X_x von Null verschieden ist. Dann werden in der Tat die Differentialgleichungen (120) erfüllt, wenn wir außerdem noch X_x als konstant annehmen. Der Wert dieser Konstanten ergibt sich dann aus der Oberflächenbedingung für den freien Querschnitt $x = l$; denn die Bedingung für den festen Querschnitt $x = 0$ liefert nur die Größe der Zwangskräfte, welche den Querschnitt festhalten und die uns hier nicht weiter interessieren.

Am freien Querschnitt ist

$$\cos(\nu x) = -1, \quad \cos(\nu y) = \cos(\nu z) = 0,$$

also nach (121) und (128):

$$X_\nu = -X_x, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = 0.$$

Da nun X_x konstant, so haben wir für die Resultierende aller parallelen Druckkräfte, welche auf die Elemente des freien Querschnitts wirken:

$$\int X_\nu \, d\sigma = -X_x \cdot q = F, \tag{129}$$

wenn q die Größe des Querschnitts bezeichnet, also:

$$X_x = -\frac{F}{q}. \tag{130}$$

Aus den Druckkomponenten ergeben sich nun auch die Deformationskomponenten nach (119) in folgender Weise: Zunächst ist wieder

$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Ferner erhält man aus:

$$\begin{aligned} \frac{F}{q} &= \lambda\sigma + 2\mu x_x, \\ 0 &= \lambda\sigma + 2\mu y_y, \\ 0 &= \lambda\sigma + 2\mu z_z \end{aligned}$$

zunächst durch Addition:

$$\frac{F}{q} = 3\lambda\sigma + 2\mu\sigma,$$

also

$$\sigma = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{F}{q}, \tag{131}$$

und daraus:

$$x_x = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \cdot \frac{F}{q}, \quad y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \cdot \frac{F}{q}. \tag{132}$$

Mit diesen Werten bilden die Verschiebungen:

$$u = x_x \cdot x, \quad v = y_y \cdot y, \quad w = z_z \cdot z \tag{133}$$

die vollständige Lösung der Aufgabe.

Die gefundene Deformation ist, wie zu erwarten, mit einer Volumendilatation verbunden; doch ist der Betrag σ dieser Dilatation, wie sich aus einer Vergleichung der Ausdrücke (131) und (125) ergibt, bei der lineären Spannung nur der dritte Teil von derjenigen bei der kubischen Spannung. Was nun weiter die Dilatationen der einzelnen Achsen betrifft, so ist selbstverständlich die

der x-Achse positiv. Ihr entspricht nach (133) eine Verschiebung des freien Querschnitts, also eine Verlängerung des Zylinders um:

$$u = x_x \cdot l = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \cdot \frac{lF}{q}, \tag{134}$$

d. h. die Verlängerung ist proportional der spannenden Kraft, proportional der Länge und umgekehrt proportional dem Querschnitt des Zylinders, endlich proportional einer Materialkonstanten, deren reziproker Wert auch als der „lineäre Elastizitätsmodul" E der Substanz bezeichnet wird:

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \tag{135}$$

Die Dilatation der Länge des Zylinders ist aber nach (132) verbunden mit einer Verkürzung einer jeden zur Zylinderachse rechtwinkligen Richtung, deren Größe sich am bequemsten übersehen läßt, wenn man das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bildet:

$$\frac{-y_y}{x_x} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \varepsilon < \frac{1}{2}. \tag{136}$$

Durch Messung beider Konstanten E und ε lassen sich λ und μ berechnen und somit das gesamte elastische Verhalten der Substanz bestimmen.

Der Wert von ε ist sehr klein für Kork, sehr groß, nahe dem Grenzwert $\frac{1}{2}$, für Kautschuk. Für Metalle und Gläser kann man ihn in erster Annäherung etwa gleich $\frac{1}{3}$ annehmen, doch zeigen sich auch beträchtliche Unterschiede in den einzelnen Materialien.

Der lineäre Elastizitätsmodul E, dessen Dimension nach (135) und (119) mit der eines Druckes übereinstimmt, besitzt für Metalle und Gläser die Größenordnung:

$$E \sim 10^{12}\left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}\right] \quad \text{(vgl. I. Gl. (8a))}. \tag{136a}$$

Von derselben Größenordnung sind daher auch die Elastizitätskoeffizienten λ und μ.

§ 31. Wir wollen jetzt weiter einen Fall der Torsion (Drillung) behandeln, und zwar wiederum für einen Zylinder von der Länge l, dessen Anfangsquerschnitt, die Grundfläche des Zylinders, in der xy-Ebene ($z=0$) festgehalten werden möge, während der freie Endquerschnitt ($z=l$) durch äußere Kräfte in seiner Ebene um einen gewissen Winkel gedreht wird. Der Mantel bleibe wiederum unbeeinflußt durch äußere Kräfte.

Zur Abwechslung wollen wir diesmal den umgekehrten Weg gehen, indem wir nicht mit den äußeren Kräften, sondern mit der angenommenen Deformation beginnen, und nach den Kräften fragen, die sie hervorrufen. Die Deformation möge darin bestehen, daß ein jeder zur xy-Ebene parallele Querschnitt des Zylinders in seiner Ebene ohne jegliche Verzerrung gedreht ist, um einen Winkel, der proportional ist der Entfernung z des Querschnitts von der Grundfläche. Bedeutet also ω den Drehungswinkel der oberen Endfläche, so ist der Drehungswinkel eines Querschnitts in der Höhe z:

$$\frac{\omega \cdot z}{l}.$$

Hieraus ergeben sich eindeutig die Werte der Verschiebungskomponenten u, v, w, am bequemsten durch Einführung von Zylinderkoordinaten:

(136 b) $$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Denn nach dem Gesagten besitzt der materielle Punkt x, y, z nach der Deformation die Koordinaten:

$$x + u = \varrho \cos\left(\varphi + \frac{\omega z}{l}\right),$$

$$y + v = \varrho \sin\left(\varphi + \frac{\omega z}{l}\right),$$

$$z + w = z.$$

Folglich, mit Rücksicht darauf, daß ω unendlich klein ist:

(137) $$u = -\frac{\omega y z}{l}, \quad v = \frac{\omega x z}{l}, \quad w = 0$$

und nach (60):

(138) $$\begin{cases} x_x = 0, & y_y = 0, & z_z = 0, \\ y_z = \dfrac{\omega x}{l}, & z_x = -\dfrac{\omega y}{l}, & x_y = 0. \end{cases}$$

Diese Deformationskomponenten liefern nach (119) die Druckkomponenten:

(139) $$\begin{cases} X_x = 0, & Y_y = 0, & Z_z = 0, \\ Y_z = -\dfrac{\mu \omega x}{l}, & Z_x = \dfrac{\mu \omega y}{l}, & X_y = 0. \end{cases}$$

Da diese Ausdrücke die Gleichungen (120) für das Innere identisch befriedigen, so folgt, daß die angenommene Deformation einen in der Natur möglichen Gleichgewichtszustand darstellt, der immer dann eintreten muß, wenn die aus (121) zu berechnenden Druckkräfte auf die Oberfläche des Zylinders wirken.

Betrachten wir zuerst die Druckkräfte auf den Mantel des Zylinders, die nach der von uns gemachten Annahme verschwinden. Da hierfür $\cos(\nu z) = 0$, während $\cos(\nu x)$ und $\cos(\nu y)$ beliebige Werte haben, so folgt aus (121) mit Benutzung von (139) für alle Punkte des Zylindermantels:

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = \frac{\mu\omega}{l}\left(y\cos(\nu x) - x\cos(\nu y)\right). \tag{140}$$

Hieraus ersehen wir, daß die von uns angenommene Deformation nur dann verträglich ist mit der weiteren Annahme, daß auf den Zylindermantel keine äußeren Kräfte wirken, wenn in allen Punkten der Mantelfläche:

$$y\cos(\nu x) - x\cos(\nu y) = 0.$$

Dies ist eine rein geometrische Bedingung, sie spricht aus, daß die Richtung $x : y$, d. h. die Richtung eines von irgendeinem Punkte der z-Achse rechtwinklig zu ihr gezogenen Radiusvektors, zusammenfällt mit der Richtung $\cos(\nu x) : \cos(\nu y)$, d. h. mit der Richtung der Normalen ν am Endpunkt des Radiusvektors, oder mit anderen Worten, daß der Querschnitt ein Kreis, der Zylinder ein Kreiszylinder ist.

Wenn wir also unsere Annahmen festhalten wollen, so sind wir genötigt, die weiteren Schlußfolgerungen auf den speziellen Fall des Kreiszylinders zu beschränken. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich dann für den äußeren Druck, der auf ein Element der oberen Endfläche des Zylinders wirkt, aus (121) und (139), da hier $\cos(\nu x) = 0, \quad \cos(\nu y) = 0, \quad \cos(\nu z) = -1,$

$$X_\nu = -\frac{\mu\omega y}{l}, \quad Y_\nu = \frac{\mu\omega x}{l}, \quad Z_\nu = 0, \tag{141}$$

oder nach (136b):

$$X_\nu = -\frac{\mu\omega\varrho}{l}\sin\varphi, \quad Y_\nu = \frac{\mu\omega\varrho}{l}\cos\varphi, \quad Z_\nu = 0.$$

Der äußere Druck wirkt also auf jedes Element der oberen freien Endfläche des Zylinders in der Ebene der Fläche und rechtwinklig zur Richtung des Radiusvektors ϱ, in dem Sinne des Torsionswinkels ω, wie leicht zu verstehen. Alle Druckkräfte

$$X_\nu d\sigma, \quad Y_\nu d\sigma, \quad Z_\nu d\sigma,$$

welche in den Elementen der Fläche angreifen, ergeben nach I. Gl. (306), da $d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\varphi$, eine resultierende Kraft:

$$\mathfrak{X}_x = \int X_\nu d\sigma = 0, \quad \mathfrak{Y}_y = \int Y_\nu d\sigma = 0, \quad \mathfrak{Z}_z = \int Z_\nu d\sigma = 0$$

und ein resultierendes Kräftepaar:

$$\mathfrak{R}_x = -\int z\, Y_\nu\, d\sigma = 0\,, \quad \mathfrak{R}_y = \int z\, X_\nu\, d\sigma = 0\,,$$

$$\mathfrak{R}_z = \int (x\, Y_\nu - y\, X_\nu)\, d\sigma\,,$$

$$\mathfrak{R}_z = \frac{\mu\omega}{l} \int\int \varrho^3\, d\varrho\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\mu\omega}{l} \cdot r^4 = N, \tag{142}$$

wenn r den Radius des Zylinders bedeutet.

Daraus schließen wir umgekehrt, daß, wenn die obere Endfläche eines Kreiszylinders, bei festgehaltener Grundfläche, von einem in ihrer Ebene liegenden Kräftepaar mit dem Drehungsmoment N angegriffen wird, der Zylinder eine Torsion von der angenommenen Art erleidet, wobei die obere Endfläche um den Winkel:

$$\omega = \frac{2}{\pi} \frac{lN}{\mu r^4} \tag{142 a}$$

gedreht wird.

Der Torsionswinkel ist also proportional der Länge des Zylinders und dem Drehungsmoment des Kräftepaares, dagegen umgekehrt proportional der vierten Potenz des Radius und der Materialkonstanten μ, die daher auch als der „Torsionsmodul" der Substanz bezeichnet wird.

§ 32. Wie wird denn nun aber ein Zylinder von nichtkreisförmigem, etwa elliptischem Querschnitt tordiert, wenn seine obere Endfläche von demselben Kräftepaar N angegriffen wird, ohne daß auf den Mantel äußere Kräfte wirken? Auf diese naheliegende Frage wollen wir jetzt noch etwas näher eingehen.

Zunächst ist klar, daß für diesen allgemeineren Fall an den zu Anfang des vorigen Paragraphen hinsichtlich der Deformation gemachten einfachen Annahmen, wonach jeder Querschnitt in seiner Ebene ohne jegliche Verzerrung gedreht ist, etwas geändert werden muß; denn dieselben passen, wie wir sahen, nur für einen Kreiszylinder. Welcher Art aber die Änderung sein muß, kann man einfach und zwingend auf folgendem Wege erkennen. Wenn jene einfache durch die Gleichungen (137) dargestellte Deformation für einen Zylinder mit beliebigem Querschnitt auch nicht mehr zutrifft, so stellt sie doch, wie wir aus der Erfüllung der Gleichungen (120) für das Innere des Zylinders schlossen, einen in der Natur möglichen Gleichgewichtszustand vor, d. h. sie tritt mit

Notwendigkeit ein, falls die dazu passenden äußeren Kräfte auf die Zylinderoberfläche wirken. Welche äußeren Druckkräfte dann auf den Mantel des Zylinders wirken müssen, ersieht man ohne weiteres aus den Gleichungen (140), in deren letzte man nur die durch die Form des Zylinderquerschnitts bedingten Werte für die Richtungscos der inneren Normalen einzusetzen hat. Danach ist die äußere Druckkraft auf den Mantel überall parallel der z-Achse, d. h. sie wirkt nach oben oder nach unten, je nachdem Z_ν positiv oder negativ ist.

Allgemein können wir schreiben:

$$Z_\nu = \frac{\mu\,\omega}{l} \cdot r \sin\delta, \tag{143}$$

wobei δ den Winkel der äußeren Normalen in einem Punkt des Zylindermantels mit dem in dem betreffenden Querschnitt gelegenen Radiusvektor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bedeutet, positiv, wenn die äußere Normale gegen den Radiusvektor im positiven Sinne um die z-Achse gedreht erscheint. Für einen kreisförmigen Querschnitt ist natürlich $\delta = 0$, für einen elliptischen Querschnitt aber, dessen große und kleine Achse bzw. mit der x- und y-Achse zusammenfällt, ist δ und damit auch Z_ν, bei positivem ω, im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten Quadranten negativ. Wenn also ein elliptischer Zylinder der betrachteten Lage tordiert wird, so müssen, damit die Querschnitte sich einfach in ihren Ebenen drehen, auf den Zylindermantel äußere scherende Kräfte wirken, im ersten und dritten Quadranten nach oben, im zweiten und vierten Quadranten nach unten, und daraus folgt unmittelbar, daß, falls diese äußeren Kräfte nicht wirken, die betreffenden Punkte der Mantelfläche eine Verschiebung in der entgegengesetzten Richtung erfahren, wodurch die ursprünglich ebenen Flächen eingebeult werden, im ersten und dritten Quadranten nach unten ($w < 0$), in den beiden anderen nach oben ($w > 0$). Nur diejenigen Punkte der Mantelfläche, in denen die Länge des Radiusvektors r beim Umgang um den Querschnitt ein Maximum oder Minimum annimmt ($\delta = 0$), also bei der Ellipse die Scheitelpunkte, behalten ihre Höhenlage ($w = 0$), die übrigen steigen oder sinken.

Um einen allgemeinen, von der Wahl des Koordinatensystems, der Lage der festen Grundfläche, dem Vorzeichen von ω und der Richtung des auf die freie Grundfläche wirkenden äußeren Drehungsmoments unabhängigen Überblick über den Sinn der Verzerrung zu gewinnen, ist es nützlich, auf die Unterscheidung der verschiedenen

Arten der Schraubenlinien einzugehen. Wenn ein Punkt eine Schraubenlinie durchläuft, so vollführt er gleichzeitig eine Drehung und eine Vorwärtsbewegung, quer zur Ebene der Drehung. Wenn nun die positive Achse der Drehung (I. § 83) zusammenfällt mit der Richtung der Vorwärtsbewegung, wie z. B. bei der Bewegung eines Korkziehers in einen festgehaltenen Flaschenhals hinein oder einer gewöhnlichen Schraube in der festgehaltenen Mutter, so heißt die Schraubenlinie eine Rechtsschraube, im anderen Fall eine Linksschraube. Bei dieser Unterscheidung ist es gleichgültig, in welcher Richtung der Punkt die Schraubenlinie durchläuft bzw. die Schraube gedreht wird. Denn mit dem Sinn der Drehung kehrt sich sowohl die Richtung der Vorwärtsbewegung als auch die der positiven Drehungsachse um.

Betrachten wir nun, auf unseren Fall zurückkommend, eine ursprünglich zur Torsionsachse parallele Faser des Zylinders, so bildet dieselbe nach vollzogener Deformation eine Schraubenlinie. Andererseits bilden die Randpunkte eines ursprünglich ebenen Zylinderquerschnitts nach vollzogener Deformation eine Wellenlinie. Dann gilt ganz allgemein der Satz, daß diejenigen Teile dieser Wellenlinie, welche die Minima des Radiusvektors r umgeben, Stücke von Schraubenlinien derselben Art sind wie die zuvor betrachteten Zylinderfasern; sind diese Rechtsschrauben, so sind es auch jene. Für die den Maxima von r benachbarten Teile der Wellenlinie gilt das Umgekehrte.

So bilden in dem oben betrachteten Beispiel des elliptischen Querschnitts bei den dort gewählten Bezeichnungen die Zylinderfasern Rechtsschrauben; folglich verläuft auch die Randwellenlinie an den Endpunkten der kleinen Halbachse wie eine Rechtsschraube, d. h. sie steigt empor beim Übergang vom ersten zum zweiten und vom dritten zum vierten Quadranten, ganz wie schon oben festgestellt wurde.

Zur quantitativen Lösung des Problems ist es erforderlich, auf die analytischen Bedingungen einzugehen. Nach den Resultaten der bisherigen Betrachtung liegt es für einen elliptischen Zylinder mit den Halbachsen a und b nahe, die Ausdrücke (137) der Verschiebungskomponenten in folgender Weise zu verallgemeinern:

$$u = -\frac{\omega y z}{l}, \quad v = \frac{\omega x z}{l}, \quad w = -Cxy, \tag{144}$$

wo C eine positive Konstante bedeutet; denn dieser Wert von w zeigt die oben gefundene Eigenschaft, im ersten und dritten Qua-

dranten negativ, im zweiten und vierten positiv zu sein. Hierdurch werden nun in der Tat sowohl die Bedingungen (120) für das Innere, als auch die (121) für die Mantelfläche befriedigt, die ersteren identisch, die letzteren, wenn man setzt:

$$C = \frac{\omega}{l} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \tag{145}$$

Damit haben wir also auch für einen elliptischen Zylinder die vollständige Lösung des Torsionsproblems vor uns. Der Ausdruck (142) für das äußere Drehungsmoment N bei einem Kreiszylinder verallgemeinert sich hier nach (121) zu:

$$N = \frac{\pi \mu \omega}{l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \tag{146}$$

Drittes Kapitel. Schwingungsvorgänge in festen Körpern.

§ 33. Wenn eine Bewegung dauernd mit unendlich kleinen Deformationen verbunden sein soll, wie wir das in diesem zweiten Teil des Buches zur allgemeinen Voraussetzung gemacht haben, so darf offenbar die Bewegung keine einseitige sein, sondern sie muß abwechselnd in verschiedenem Sinn erfolgen, d. h. sie muß in einer „Schwingung" des Körpers bestehen, bei der die Verschiebungen und mit ihnen die Deformationen beständig ihr Vorzeichen wechseln. Wir haben es hier also mit Schwingungsvorgängen in elastischen festen Körpern zu tun, die wir der Einfachheit halber auch als isotrop voraussetzen wollen. Die hierfür maßgebenden Gesetze sind schon im ersten Kapitel festgestellt worden. Sie finden sich formuliert in den Bewegungsgleichungen (83), die wir, mit Weglassung der Gravitationskräfte, folgendermaßen schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

ferner in den Oberflächenbedingungen (74), und endlich in den Beziehungen (119) zwischen dem Drucktensor und dem Deformationstensor für eine isotrope Substanz.

Bei weitem die interessantesten Fälle derartiger Schwingungsvorgänge beziehen sich auf solche Körper, deren Abmessungen nicht nach allen drei Dimensionen des Raumes von gleicher Größen-

ordnung sind, sondern die sich vorwiegend nur nach zwei oder nur nach einer Raumdimension erstrecken. Dies bedingt natürlich zugleich eine erhebliche Vereinfachung der Bewegungsgesetze, da dann die Anzahl der unabhängigen Raumkoordinaten eine geringere wird. Andererseits dagegen empfiehlt es sich mit Rücksicht auf die in der Praxis wichtigsten Schwingungsvorgänge, eine gewisse Verallgemeinerung in den früher aufgestellten Gleichungen vorzunehmen. Wir haben nämlich damals, im § 22, die Verschiebungskomponenten u, v, w und mit ihnen die Deformationskomponenten von demjenigen Zustand des Körpers aus gerechnet, in welchem alle äußeren Druckkräfte Null sind. Dadurch wurden die Druckkomponenten homogene Funktionen der Deformationskomponenten, und im undeformierten Zustand waren alle Druckkomponenten gleich Null. In der Natur sind aber häufig gerade solche Schwingungen von Interesse, bei denen diese Beschränkung aufgehoben ist. Nehmen wir z. B. die Schwingungen einer Violinsaite, so werden naturgemäß die Verschiebungen u, v, w von demjenigen Zustand der Saite aus zu rechnen sein, in welchem sie sich im stabilen Gleichgewicht befindet. Dies ist also der deformationslose Zustand. Aber in ihm sind die Druckkomponenten keineswegs alle Null, sondern es herrscht in der Saite eine gewisse, und zwar verhältnismäßig starke Spannung. Ja, diese Spannung bildet sogar eine den Charakter der Schwingungen so wesentlich bestimmende Ursache, daß der Einfluß der dem Material der Saite eigentümlichen Elastizitätskonstanten λ, μ dagegen praktisch ganz zurücktritt. Denn z. B. eine Darmsaite würde ohne äußere Spannung überhaupt nicht schwingen. Man kann hier also in gewissem Sinne von einer künstlichen, erzwungenen Elastizität sprechen, die gar nicht von dem Material, sondern nur von äußeren Kräften abhängt. Um diesen Verhältnissen gebührend Rechnung zu tragen, werden wir daher die Beziehungen (119) zwischen den Druckkomponenten und den Deformationskomponenten dahin verallgemeinern, daß wir die Druckkomponenten zwar, wie bisher, als lineäre, aber nicht mehr als homogene Funktionen der Deformationskomponenten betrachten und die absoluten Glieder in diesen Funktionen dem jeweilig zutreffenden stabilen Gleichgewichtszustand des Körpers anpassen.

Dadurch führen wir, wie schon an dem obigen Beispiel hervorgehoben wurde, neben den Materialkonstanten noch eine neue Konstante in die Bewegungsgleichungen ein, und je nachdem der Einfluß der ersten oder der der zweiten Konstanten überwiegt,

erhalten wir ganz verschiedenartige Schwingungsvorgänge: solche mit natürlicher und solche mit künstlicher Elastizität. Diese Unterschiede sind praktisch so wichtig, daß sie auch im Sprachgebrauch vollständig voneinander getrennt werden. Von den eindimensionalen Körpern schwingen „Stäbe" mit natürlicher, „Saiten" mit künstlicher Elastizität, von den zweidimensionalen schwingen „Platten", „Glocken", mit natürlicher, „Membrane", „Pauken" mit künstlicher Elastizität. In der Akustik sind, soweit feste Körper in Betracht kommen, die Schwingungen mit künstlicher Elastizität weitaus die wichtigeren. Daher wollen wir uns hier vorwiegend mit diesen beschäftigen und wählen als einfachsten Fall die Schwingungen einer Saite, die so stark gespannt ist, daß der Einfluß der Elastizität des Materials, die sogenannte Steifigkeit der Saite, hinter dem der Spannung ganz zurücktritt.

§ 34. Stark gespannte Saite. In der Ruhelage falle die Saite, welche die Form eines Zylinders mit unendlich kleinem Querschnitt besitzen soll, mit der x-Achse zusammen. Dann ist jeder Punkt der Saite durch einen bestimmten Wert von x charakterisiert; und die Bewegung der Saite ist vollständig bekannt, wenn die Verschiebungskomponenten u, v, w als Funktionen von x und t gefunden sind. Zur Lösung dieser Aufgabe wollen wir vor allem die im vorigen Paragraphen als notwendig bezeichnete Verallgemeinerung der Beziehungen (119) einführen. Der Gleichgewichtszustand der Saite ist identisch mit dem in § 30 behandelten Gleichgewicht eines einseitig gespannten Zylinders, es gelten also für ihn die dortigen Gleichungen (128) und (130), wenn F die spannende Kraft, q den Querschnitt der Saite bezeichnet. Diese Gleichungen geben also die Werte der Druckkomponenten für den deformationslosen Zustand der Saite. Daraus folgt eindeutig die gesuchte Verallgemeinerung von (119) für unseren Fall:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{F}{q} - \lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z, \\ Y_y &= \quad - \lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= \quad - \lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned}\right\} \quad (148)$$

Die Voraussetzung, daß die Saite „stark" gespannt ist, spricht sich aus in der Bedingung, daß das erste, von der Spannung F herrührende Glied in dem Ausdruck von X_x groß ist gegen jedes der folgenden Glieder. Andrerseits darf man F nicht etwa beliebig groß annehmen. Denn da σ und x_x unendlich klein sind, so ist X_x,

und mithin auch $\frac{F}{q}$, klein gegen λ und μ. Die Größenordnung der Spannung F ist also in gewisse Grenzen eingeschlossen. Bedenkt man aber, daß z. B. für Metalle die Koeffizienten λ und μ nach (136a) von der Größenordnung $10^{12}\left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}\right]$ sind, welche Größenordnung etwa dem Drucke von 10000 kg auf 1 qmm entspricht, so ersieht man immerhin, daß für die Größe der Spannung praktisch noch ein verhältnismäßig weiter Spielraum bleibt.

Stellen wir nun die Grenzbedingungen für den Mantel des Saitenzylinders auf. Da die Saite, abgesehen von den beiden Enden, die wir uns fest eingeklemmt denken, frei schwingen soll, so wirken auf die Mantelfläche keinerlei äußere Druckkräfte, und wir haben hierfür nach (74):

$$X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) = 0, \quad \cdots \tag{149}$$

Die Normale ν der Mantelfläche kann sehr verschiedene Richtungen haben, doch ist sie an die Bedingung gebunden, daß sie stets und überall einen rechten Winkel bildet mit derjenigen Raumkurve, welche die Saite zu irgendeiner Zeit darstellt. Diese Raumkurve wird gebildet von den Punkten mit den Koordinaten $x + u$, v, w, ihre Richtungsverhältnisse sind also:

$$d(x+u) : dv : dw = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) : \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial x}$$

und es gilt daher die Bedingung:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos(\nu x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\nu y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu z) = 0.$$

Da die Deformationen unendlich klein sind, so ist hiernach $\cos(\nu x)$ unendlich klein gegen die beiden anderen cos, wie leicht verständlich, und man kann einfacher schreiben:

$$\cos(\nu x) = -\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\nu y) - \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu z).$$

Setzt man diesen Wert in die drei Gleichungen (149) und bedenkt, daß das Verhältnis $\cos(\nu y) : \cos(\nu z)$ jeden beliebigen Wert haben kann, so ergeben sich, mit Vernachlässigung von kleinen Gliedern zweiter Größenordnung, die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{aligned} X_y &= X_x \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ X_z &= X_x \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right. \tag{150}$$

$$Y_y = 0, \quad Z_z = 0, \quad X_y = 0. \tag{151}$$

Es bleibt noch übrig, auch die sechste Druckkomponente X_x bis auf Glieder zweiter Ordnung genau auszudrücken. Dies geschieht durch die Gleichungen (148), welche zunächst in Verbindung mit (151) liefern:

$$y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu}\sigma,$$

hieraus mit Rücksicht auf (118):

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda+\mu}x_x,$$

und endlich nach der ersten Gleichung (148) nebst (135):

$$X_x = -\frac{F}{q} - E\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{152}$$

Nunmehr ergeben sich die gesuchten Bewegungsgleichungen der Saite aus (147) mit den Werten (150), (151), (152) der Druckkomponenten in folgender Form:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{153a}$$

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{F}{q}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \tag{153b}$$

$$k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{F}{q}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{153c}$$

Jede der Verschiebungskomponenten u, v, w befolgt also, unabhängig von den beiden anderen, ihr besonderes Gesetz, und zwar ist die Form dieser Gesetze für alle drei Komponenten die nämliche. Aber die Größe der in den Gleichungen auftretenden charakteristischen Konstante ist nicht überall die gleiche; denn für u gilt ein anderer Wert als für v und w. Dies rührt natürlich davon her, daß die Richtung von u mit der Richtung der Saite zusammenfällt, während die Richtungen von v und w auf ihr senkrecht stehen. Daher nennt man die u-Schwingungen „Longitudinalschwingungen", die v- und w-Schwingungen dagegen „Transversalschwingungen" der Saite. Die Longitudinalschwingungen werden, wie man sieht, lediglich durch die Elastizität der Saitensubstanz bedingt, und zwar speziell durch den lineären Elastizitätsmodul derselben, sie sind unabhängig von der Spannung, während dagegen bei den Transversalschwingungen gerade das Umgekehrte der Fall ist.

Für die weitere Behandlung der Schwingungsgesetze genügt es offenbar, eine einzige Komponente zu betrachten; da in der Akustik die Transversalschwingungen weitaus wichtiger sind, so schließen wir die folgenden Betrachtungen an die Gleichung (153b)

an, welche die ebenen Transversalschwingungen in der xy-Ebene darstellt. Sie läßt sich mit Einführung der Konstanten

$$a^2 = \frac{F}{kq} \tag{154}$$

in der Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{155}$$

und liefert durch Integration v als Funktion der beiden unabhängigen Variabeln x und t. Hält man x konstant und läßt t sich ändern, so ergibt sich die Bewegung eines bestimmten Punktes der Saite; hält man dagegen t konstant und läßt x sich ändern, so ergibt sich die Form der Kurve, welche die Saite in einem bestimmten Zeitpunkt bildet. Demgemäß bezeichnet $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ die Beschleunigung eines Saitenpunktes, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ die Krümmung der Saitenkurve, und die Gleichung (155) sagt aus, daß die Beschleunigung eines jeden Saitenpunktes, also auch die Kraft, mit der er nach seiner Gleichgewichtslage hingezogen wird, proportional ist der Krümmung der Saitenkurve in diesem Punkte, wie auch leicht verständlich.

§ 35. Integration der Bewegungsgleichung. Um das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (155) zu finden, führen wir statt der unabhängigen Variabeln x und t als neue unabhängige Variable ein:

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at. \tag{156}$$

Dann gelten für die Transformation der Differentialquotienten die folgenden Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_\eta \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_\xi \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot a - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot a,$$

daraus durch Wiederholung derselben Operation:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

und auf ganz analogem Wege:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_t = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Ersetzt man nun in der Gleichung (155) die Differentialquotienten mit den unabhängigen Variabeln x und t durch die mit den unabhängigen Variabeln ξ und η, so folgt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

welche Gleichung besagt, daß $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ nur von ξ, $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ nur von η abhängig ist. Daher ist:

$$v = f(\xi) + g(\eta),$$

wo f und g irgend zwei Funktionen einer einzigen Variabeln sind. Oder mit Rücksicht auf (156):

$$v = f(x + at) + g(x - at). \tag{157}$$

Dies ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (155). Daß in der Tat jene Differentialgleichung durch den Ausdruck (157) befriedigt wird, wie auch f und g gewählt sein mögen, erkennt man natürlich auch durch direkte Substitution. Dabei ist folgendes zu beachten.

Die Beschränkung, welche durch (157) dem Werte von v auferlegt ist, und welche ihn dadurch befähigt, die Differentialgleichung (155) zu befriedigen, beruht darauf, daß die unabhängigen Variabeln x und t in der Funktion f nur in der Verbindung $x + at$, in der Funktion g nur in der Verbindung $x - at$ vorkommen. Diese Verbindungen nennt man auch die „Argumente" der Funktionen f und g. Jede dieser beiden Funktionen hängt nur von ihrem speziellen Argument ab. Differentiiert man also die Funktion, sei es nach x oder nach t, so kann man zunächst nach dem Argument differentiieren, und dann das Argument nach der betreffenden Variabeln differentiieren. Auf diese Weise erhält man aus (157):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f' + g', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = f' \cdot a - g' \cdot a, \tag{157a}$$

indem mit f' und g' die Differentialquotienten von f und g nach ihren Argumenten bezeichnet sind. Durch Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f'' + g'', \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f'' \cdot a^2 + g'' \cdot a^2,$$

und diese Werte befriedigen in der Tat ganz allgemein die Differentialgleichung (155).

Die spezielle Form der Funktion f oder g kann niemals aus der Differentialgleichung erschlossen werden, sie ergibt sich erst aus den Anfangsbedingungen und den Grenzbedingungen der schwingenden Saite. Ehe wir jedoch zur Berücksichtigung dieser Bedingungen übergehen, wollen wir allgemein den besonderen physikalischen Charakter untersuchen, welchen der für die Verschiebung v gefundene Ausdruck (157) der Bewegung der Saite aufprägt.

Nehmen wir zunächst einmal den speziellen Fall, daß die eine der beiden Funktionen, etwa g, verschwindet, so daß

$$v = f(x + at), \tag{158}$$

so haben wir eine Bewegung der Saite, für welche der Umstand charakteristisch ist, daß die Verschiebung v sich nicht ändert, während x und t sich ändern, falls nur $x + at$ konstant bleibt, d. h. falls

$$dx + a\,dt = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} = -a.$$

Die letzte Gleichung bezeichnet aber eine Bewegung mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der negativen x-Achse. Daraus folgt, daß, wenn man längs der Saite in der Richtung der negativen x-Achse mit der Geschwindigkeit a hinfährt, sei es mit dem Auge oder mit einem Zeigerstift, derjenige Saitenpunkt, auf den man dabei trifft, in dem betreffenden Augenblick immer gerade eine ganz bestimmte Verschiebung v besitzt. Man kann dies auch so ausdrücken: Eine jede Verschiebung v pflanzt sich ungeändert mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der negativen x-Achse fort. Daher bleibt die Form der Kurve, welche die Saite in jedem Augenblick bildet, stets die nämliche, sie verschiebt sich nur als Ganzes fortwährend in der bezeichneten Weise. Eine derartige Bewegung nennt man eine „Wellenbewegung", die Geschwindigkeit der Verschiebung die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit" der Welle. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist grundsätzlich zu unterscheiden von der korpuskularen Geschwindigkeit der Saitenpunkte, mit der sie an sich gar nichts zu tun hat (vgl. I. § 1). Die Form der Welle ist bestimmt durch die Funktion f, sie kann ganz beliebig, braucht insbesondere nicht etwa periodisch zu sein. Ein einfaches, sehr anschauliches Bild der Bewegung gewinnt man, wenn man die Funktion f auf einem Streifen Papier als Kurve aufzeichnet, mit dem Argument ξ als Abszisse und dem Werte von f als Ordinate, und dann diesen Papierstreifen mit der Geschwindigkeit $-a$ längs der Saite hinzieht. Dann gibt in jedem Augenblick die Zeichnung direkt das Bild der Saite. Für $t = 0$ fällt das Argument $\xi = x + at$ mit der Abszisse x eines Saitenpunktes direkt zusammen.

Ganz entsprechend bezeichnet die partikuläre Lösung:

$$v = g(x - at) \tag{159}$$

eine Wellenbewegung mit der nämlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a, aber nach der positiven Seite der x-Achse fortschreitend.

Der allgemeine Fall (157) der Schwingung besteht demnach in der Superposition zweier, im allgemeinen verschiedener, mit der nämlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Wellen. Zeichnet man eine jede der beiden Wellen als Kurve auf einen Papierstreifen, und verschiebt diese Streifen längs der Saite mit den Geschwindigkeiten $\pm a$, so ergibt zu jeder Zeit die algebraische Summation je zweier übereinanderliegender Ordinaten der beiden Wellenkurven die augenblickliche Verschiebung v des entsprechenden Saitenpunktes.

Nun wollen wir untersuchen, wie die Form der beiden Wellen f und g durch die Anfangs- und Grenzbedingungen des Schwingungsvorgangs bestimmt wird, und behandeln zu diesem Zwecke zunächst den idealen Fall einer unendlich langen Saite.

§ 36. Saite beiderseits unbegrenzt. Wenn die Saite von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ reicht, so genügt zur vollständigen Bestimmung der Bewegung die Berücksichtigung des Anfangszustandes, und es erübrigt sich die Betrachtung der Grenzbedingungen.

Gegeben seien zur Zeit $t = 0$ die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten aller Saitenpunkte, also:

$$v_0 = F(x) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = \Phi(x), \tag{160}$$

wo F und Φ zwei für alle positiven und negativen Werte von x bekannte Funktionen bedeuten. Dies in (157) und (157a) eingesetzt ergibt:

$$f(x) + g(x) = F(x),$$
$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a}\Phi(x),$$

und durch Integration der letzten Gleichung:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \Phi(x)\,dx.$$

Folglich:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \Phi(x)\,dx, \\ g(x) &= \tfrac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \Phi(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Durch diese Ausdrücke von f und g sind die Formen der beiden Wellen und also auch die ganze Bewegung vollkommen gegeben. Man hat nur in f statt x das Argument $x + at$, und in g das Argument $x - at$ zu setzen. Die in der willkürlichen Wahl der Integrationskonstanten c liegende Unbestimmtheit ist nur eine scheinbare, weil in dem Werte (157) von v f und g nur miteinander addiert vorkommen, und eine Änderung von c den Wert von f im entgegengesetzten Betrage ändert wie den von g. Wir können also auch unbeschadet der Allgemeinheit $c = 0$ setzen.

Betrachten wir als Beispiele einige spezielle Fälle, zunächst den, daß alle Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null sind, wie bei einer gezupften, d. h. aus der Gleichgewichtslage gebrachten und dann freigelassenen Saite. In diesem Falle ist $\Phi(x) = 0$, also nach (161):

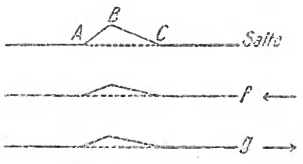

Fig. 5.

$$(162)\quad f(x) = g(x) = \frac{1}{2}F(x).$$

Dann sind also die beiden Wellen einander gleich, und jede der beiden Wellenfunktionen ist gleich der Hälfte des Betrages der Anfangsverschiebung. Hieraus ergibt sich unmittelbar der ganze Verlauf der Bewegung. In der Fig. 5 stellt die oberste Linie das Bild der Saitenkurve im Anfangszustande dar. Die

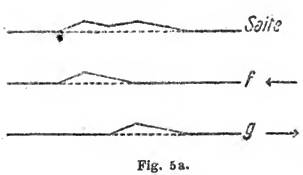

Fig. 5a.

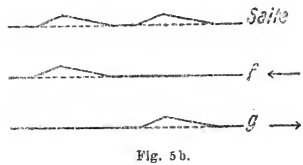

Fig. 5b.

Gleichgewichtsstörung beschränkt sich hier auf einen begrenzten Teil der Saite, sie mag dadurch hervorgebracht sein, daß man die Saite in einem Punkte B mit einem Stäbchen zupft und gleichzeitig in zwei anderen Punkten A und C zu beiden Seiten von B festhält. Wird nun die Saite ohne Anfangsgeschwindigkeit freigelassen, so vollzieht sich ihre Schwingung in der oben beschriebenen Art, indem die darunter gezeichneten Bilder der einander gleichen

Wellenfunktionen f und g im Sinne der beiden Pfeile mit der Geschwindigkeit a längs der Saite vorbeigezogen und die übereinanderfallenden Ordinaten in jedem Augenblicke algebraisch addiert werden. Danach spaltet sich die ursprüngliche Ausbuchtung der Saite in zwei kongruente halb so große Ausbuchtungen, die nach beiden Seiten mit den Geschwindigkeiten $\pm a$ auseinanderrücken, während dazwischen wieder Ruhe eintritt, wie dies in den Figuren 5a und 5b versinnlicht ist, welche in ihrer obersten Linie das Bild der Saite nach Ablauf einer gewissen Zeit, in ihren beiden unteren Linien die Methode der Konstruktion des Bildes erkennen lassen. Von Periodizität ist bei diesem Vorgang keine Spur. So kehrt auch der ursprünglich am weitesten aus der Gleichgewichtslage entfernte Punkt B direkt in dieselbe zurück, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit, und bleibt dort sofort für immer in Ruhe.

Analog erledigt sich der entgegengesetzte Fall, daß alle Anfangsverschiebungen gleich Null sind, wie bei einer langen Klaviersaite, die an einer Stelle von einem Hammer so plötzlich angeschlagen wird, daß der Stoß schon beendigt ist, ehe die gestoßenen Saitenpunkte ihre Gleichgewichtslage merklich verlassen haben. Dann ist nach (160):

$$F(x) = 0$$

und nach (161):

$$f(x) = -g(x) = \frac{1}{2a}\int_c^x \Phi(x)\,dx. \tag{163}$$

Die beiden Wellenfunktionen f und g sind also hier entgegengesetzt gleich, und eine ebenso wie bei dem oben behandelten Fall durchgeführte weitere Betrachtung ergibt, daß von der Anschlagstelle sich zwei entgegengesetzt gleiche Wellen nach beiden Seiten entfernen, während dazwischen die Saite sofort in den Ruhezustand zurückkehrt.

Man darf aber nicht glauben, daß bei jeder Art von Gleichgewichtsstörung der Saite von der Störungsstelle aus zwei Wellen nach beiden Seiten auseinanderrücken. Um dies einzusehen, wollen wir jetzt die Frage aufwerfen: Welche Bedingung muß im Anfangszustand erfüllt sein, damit sich von der Störungsstelle aus nur eine einzige Welle, etwa die f-Welle, fortpflanzt? Die Antwort darauf geben die Gleichungen (161), wenn man darin $g = 0$ setzt, also:

$$F(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \Phi(x)\, dx,$$

oder:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{a} \Phi(x),$$

oder nach (160):

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0, \tag{164}$$

d. h. im Anfangszustand ist die Geschwindigkeit eines Saitenpunktes gleich $a$mal der Tangente des Neigungswinkels der Saitenkurve gegen die x-Achse.

Wenn für jeden Punkt der Saite diese Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Verschiebung erfüllt ist, so rückt die ganze Störung als eine einzige unveränderliche Welle nach der negativen x-Richtung fort, wie man auch durch eine einfache kinematische Betrachtung einsehen kann, da ja durch die Form der Kurve f und durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a auch die Geschwindigkeit eines jeden Saitenpunktes unmittelbar bestimmt ist.

§ 37. Saite beiderseits begrenzt. Nun behandeln wir die Schwingungen einer Saite von der endlichen Länge l, die in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ festgeklemmt sein möge. Dann gelten natürlich auch wieder die Gleichungen (161), aber diese Gleichungen haben jetzt nur für diejenigen Werte von x einen Sinn, welche zwischen 0 und l liegen, weil die Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$, welche die Anfangswerte für die Verschiebungen und für die Geschwindigkeiten der Saitenpunkte darstellen, nur für $0 < x < l$ definiert sind. Zur Darstellung der Bewegung für alle Zeiten braucht man aber nach (157) die Werte von f und g auch für andere Werte ihrer Argumente, so z. B. für große positive t die Werte von f für große positive, die Werte von g für große negative Werte des Arguments. Wir müssen also die durch die Gleichungen (161) gelieferte Bestimmung von f und g noch weiter vervollständigen, und hierzu dient uns die an den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ zu erfüllende Bedingung $v = 0$, oder nach (157):

$$0 = f(at) + g(-at)$$

und

$$0 = f(l + at) + g(l - at),$$

gültig für alle beliebigen Werte von t. Schreiben wir in diesen beiden Gleichungen x an Stelle von at, so kommt:

$$f(x) + g(-x) = 0, \tag{165}$$

$$f(l+x) + g(l-x) = 0. \tag{166}$$

Durch diese beiden, für alle Werte von x gültigen Gleichungen wird die zur Berechnung der Wellenfunktionen f und g als notwendig erkannte Ergänzung geliefert. Wenn wir nämlich zunächst in (166) $l+x$ an Stelle von x schreiben, so folgt:

$$f(2l+x) + g(-x) = 0,$$

und durch Vergleich mit (165):

ebenso:

$$\left.\begin{aligned} f(2l+x) &= f(x), \\ g(2l+x) &= g(x), \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

d. h. die Wellenfunktionen f und g sind beide periodisch in bezug auf x, mit der Periode $2l$. Daraus folgt nach (157) unmittelbar, daß auch die Bewegung der Saite periodisch ist in bezug auf die Zeit t, mit der Periode $\frac{2l}{a}$.

Wir wollen nun zunächst feststellen, wie in der Tat durch die Anfangsbedingungen (161) und die Grenzbedingungen (165) und (167) die Werte der Wellenfunktionen f und g für alle positiven und negativen Werte ihrer Argumente eindeutig bestimmt werden.

Zunächst sind durch (161) $f(x)$ und $g(x)$ bestimmt für $0 < x < l$. Sodann liefern die Gleichungen (165) in der Form:

$$f(x) = -g(-x) \quad \text{und} \quad g(x) = -f(-x) \tag{168}$$

auch die Werte von $f(x)$ und $g(x)$ für $-l < x < 0$. Denn die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind ja für diesen Wertenbereich von x bekannt. Dadurch sind aber $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervall einer ganzen Periode, nämlich von $x = -l$ bis $x = +l$, gegeben, und somit nach (167) vollständig bestimmt.

Wir wollen diese Berechnungsmethode an einem speziellen Beispiel durchführen, und wählen dazu der Einfachheit halber eine Saitenschwingung, bei der anfänglich nur eine einzige Welle, etwa die f-Welle, vorhanden ist. Es gelte also im Anfangszustand die Beziehung (164). Das anfängliche Bild der Saite sei etwa das in der Fig. 6 gezeichnete; dann wird die Wellenfunktion $f(x)$ für $0 < x < l$ durch das nämliche Bild dargestellt, während $g(x)$ in diesem Intervall $= 0$ ist. Dagegen ist für $-l < x < 0$ nach (168)

$f(x)$ durchweg $= 0$, während $g(x)$ die in der Figur gezeichnete Form besitzt, die man das „entgegengesetzte Spiegelbild von $f(x)$ in bezug auf den Punkt $x = 0$“ nennen kann. Diese Formen wiederholen sich nun periodisch, wie die Fig. 6 zeigt.

Mit der Zeichnung der Wellenfunktionen f und g ist der ganze Ablauf der Bewegung in der bekannten Weise bestimmt. Die

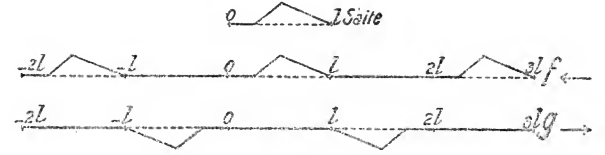

Fig. 6.

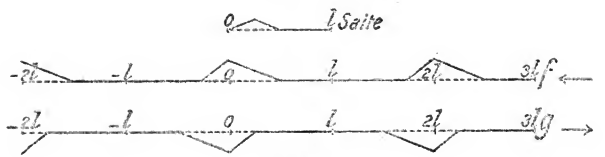

Fig. 6a.

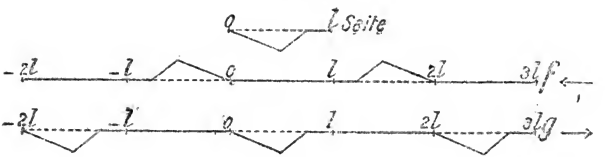

Fig. 6b.

Figuren 6a und 6b zeigen wieder in ihrer obersten Linie das resultierende Bild der Saite nach Ablauf einer gewissen Zeit, in ihren beiden unteren Linien die Art, wie sich das Bild aus f und g zusammensetzt.

Danach verwandelt sich die f-Welle beim Auftreffen auf den festgeklemmten Endpunkt $x = 0$ der Saite in eine nach der entgegengesetzten Richtung fortschreitende g-Welle, d. h. sie wird „reflektiert“, und zwar mit entgegengesetztem Vorzeichen. Hierauf

durchläuft die g-Welle die ganze Länge der Saite, um am anderen Ende, bei $x = l$, wiederum als f-Welle reflektiert zu werden. Nach Ablauf der Zeitperiode $\frac{2l}{a}$ ist der alte Anfangszustand wieder erreicht und das Spiel beginnt wieder von vorn.

Ebenso erledigt sich der allgemeine Fall, daß am Anfang beide Wellen, f und g, von Null verschieden sind.

§ 38. Analytische Darstellung periodischer Funktionen. Im vorstehenden haben wir die periodischen Wellenfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ in den verschiedenen Intervallen von x mittels verschiedener Gleichungen dargestellt; es ist aber häufig auch von Wert, eine Wellenfunktion $f(x)$ in ihrem ganzen Verlauf, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, durch einen einzigen analytischen Ausdruck zu bezeichnen.

Um dies zu erreichen, suchen wir zunächst den allgemeinsten analytischen Ausdruck für eine Funktion $f(x)$ mit der Periode $x = 2l$, oder mit anderen Worten die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (167). Wir gehen zu dem Zwecke aus von der partikulären Lösung:

$$f(x) = e^{\alpha x}, \tag{169}$$

welche jene Gleichung offenbar dann befriedigt, wenn die Konstante α der Bedingung genügt:

$$e^{2l\alpha} = 1.$$

Daraus folgt:

$$2l\alpha = 2n\pi i,$$

wobei n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Setzen wir den sich hieraus ergebenden Wert von α in (169) ein, so erhalten wir durch Trennung des reellen und imaginären Teiles von $f(x)$ zwei partikuläre Lösungen:

$$\cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{und} \quad \sin\frac{n\pi x}{l},$$

die wir dadurch noch weiter verallgemeinern können, daß wir sie mit beliebigen Konstanten A_n und B_n multiplizieren. Bilden wir solche Lösungen für alle möglichen Ordnungszahlen n, wobei für jedes n die A_n und B_n verschiedene Werte haben können, und addieren sie zueinander, so erhalten wir wiederum eine Lösung der Funktionalgleichung (167), welche, wie hier nicht näher begründet werden soll, die allgemeine Lösung bildet. Man kann sie in folgender Form schreiben:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{170}$$

Hier sind die Glieder mit negativen n weggelassen, was, wie man leicht erkennt, der Allgemeinheit keinen Eintrag tut, da jedes Glied mit negativem n sich mit dem Glied, welches das entsprechende positive n besitzt, stets in ein einziges Glied vereinigen läßt. Daher vertritt jedes Glied der beiden Summen im Grunde zwei Glieder. Eine Sonderstellung nimmt das Glied mit $n = 0$ ein, welches nur einmal auftritt, und daher auch, wie üblich, den Zahlenfaktor $\frac{1}{2}$ erhalten hat. Derselbe rechtfertigt sich in der Tat auch durch die einfachere Bedeutung, welche die Konstante A_0 dann besitzt, wie sich weiter unten zeigen wird.

Daß die Reihe (170), welche nach ihrem Entdecker die „Fouriersche Reihe" genannt wird, wirklich die Periode $2l$ in x besitzt, erkennt man natürlich auch unmittelbar durch Einsetzen von $x + 2l$ statt x, da dann sämtliche Winkel um ganze Vielfache von 2π wachsen. Da aber weiterhin jede in x mit der Periode $2l$ periodische Funktion sich durch (170) darstellen läßt, so erhebt sich die Frage, wie man die Koeffizienten A und B berechnet, wenn der Verlauf der Funktion innerhalb einer Periode, etwa von $x = 0$ bis $x = 2l$, irgendwie gegeben ist.

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns also die Werte von $f(x)$ für $0 < x < 2l$ ganz beliebig gegeben, und berechnen zunächst das Integral

$$\int_0^{2l} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{171}$$

für irgendeine positive von Null verschiedene ganze Zahl n. Dasselbe besitzt nach der Voraussetzung einen bekannten vollkommen bestimmten Wert.

Andererseits stellt sich das Integral (171), wenn man darin $f(x)$ durch die Reihe (170) ersetzt, dar als eine Summe von Integralen, die wir jetzt einzeln berechnen wollen. Das erste, mit A_0 multiplizierte Integral verschwindet, weil

$$\frac{A_0}{2} \cdot \int_0^{2l} \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = 0. \tag{172}$$

In den folgenden Integralen treten nacheinander die Ordnungszahlen 1, 2, 3, $\cdots n, \cdots$ auf, die im allgemeinen von der Zahl n in (171) verschieden sind; wir wollen sie daher mit n' bezeichnen. Wenn n' von n verschieden ist, so lauten die entsprechenden beiden Teilintegrale jedesmal:

$$A_{n'} \int_0^{2l} \cos \frac{n'\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx + B_{n'} \int_0^{2l} \sin \frac{n'\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0. \quad (173)$$

Nur für die beiden Glieder, in denen $n' = n$ ist, lauten die entsprechenden Integrale:

$$A_n \int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx + B_n \int_0^{2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = A_n \cdot l. \quad (174)$$

Daher reduziert sich die ganze Summe von Integralen, in welche (171) zerfällt, auf den einzigen Ausdruck (174), und wir haben die Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx. \\ \text{Ganz ebenso:} \qquad B_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx. \end{aligned}\right\} \quad (175)$$

Damit sind die Koeffizienten A_n und B_n vollkommen bestimmt. Um endlich A_0 zu erhalten, berechnen wir aus (170):

$$\int_0^{2l} f(x)\, dx = \frac{A_0}{2} \cdot 2l = A_0 \cdot l,$$

und sehen daraus, daß die Gleichungen (175) auch auf den Fall $n = 0$ anwendbar sind. Darin liegt der Vorteil der Bezeichnung des konstanten Gliedes mit $\frac{A_0}{2}$. Der Wert von B_0 ist gleichgültig, da der $\sin \frac{n\pi x}{l}$ für $n = 0$ verschwindet.

Aus der Art der Berechnung der Konstanten A_n und B_n erkennt man auch, daß diese Bestimmung eine eindeutige ist, d. h. es gibt nur eine einzige Fouriersche Reihe mit der Periode $2l$, welche innerhalb der Periode bestimmt vorgeschriebene Werte an-

nimmt. Gäbe es nämlich noch eine zweite Reihe, etwa mit den Koeffizienten A_n' und B_n', so würden auch diese Koeffizienten notwendig die Gleichungen (175) befriedigen müssen, sie wären also, da die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen vorgeschriebene Werte besitzen, mit den Koeffizienten A_n und B_n identisch.

Um die Leistungsfähigkeit der Fourierschen Reihe noch heller zu beleuchten, führen wir die Berechnung für ein spezielles Beispiel durch. Wir wollen einmal annehmen, daß für $0 < x < l$ $f(x) = x$, während für $l < x < 2l$ $f(x) = 0$. Den Verlauf dieser Funktion stellt die Kurve in Fig. 7 dar. In den Intervallen von

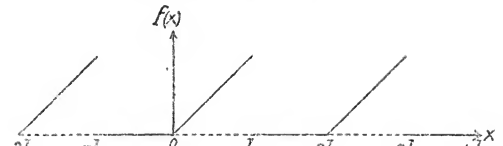

Fig. 7.

$-l$ bis 0, von l bis $2l$, usw. fällt sie mit der Abszissenachse zusammen, während sie in den dazwischen liegenden Intervallen ein Stück einer Geraden bildet, welche den Koordinatenwinkel halbiert. Daher ist die Funktion $f(x)$ für die x-Werte $-l$, l, $3l$, $\cdots$ unstetig, indem sie bei wachsendem x von l auf 0 springt. Genau dieselben Eigenschaften besitzt die Fourier-Reihe, die sich aus (175) ergibt und die wir nun aufstellen wollen. Die beiden dort auftretenden Integrale lassen sich zerlegen in je zwei Teilintegrale, das erste von 0 bis l, das zweite von l bis $2l$ zu erstrecken. Im ersten Integral gilt $f(x) = x$, im zweiten $f(x) = 0$, daher ist:

$$A_n = \frac{1}{l}\int_0^l x \cdot \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + 0 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cdot l,$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_0^l x \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\cdot l,$$

während für $n = 0$ sich ergibt:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{l}{2}.$$

Mit diesen Werten der Koeffizienten schreibt sich die Reihe (170):

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{2l}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l} - \frac{2l}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi x}{l} - \cdots + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{l} - \cdots, \tag{176}$$

welche den Verlauf der Kurve in Fig. 7 in einen einzigen analytischen Ausdruck zusammenfaßt.

Machen wir ein paar Stichproben. Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$, also nach (176):

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} - \frac{2l}{9\pi^2} - \frac{2l}{25\pi^2} - \cdots,$$

oder:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots. \tag{177}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ ist $f(x) = x = \frac{l}{2}$, also nach (176):

$$\frac{l}{2} = \frac{l}{4} + \frac{l}{\pi} - \frac{l}{3\pi} + \frac{l}{5\pi} - \frac{l}{7\pi} + \cdots,$$

oder:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \tag{178}$$

Für $x = -\frac{l}{2}$ ist $f(x) = 0$, also nach (176):

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{l}{\pi} + \frac{l}{3\pi} - \frac{l}{5\pi} + \frac{l}{7\pi} - \cdots,$$

was wiederum auf die letzte Reihe führt.

Interessant ist das Verhalten der Fourier-Reihe (176) an einer Unstetigkeitsstelle, z. B. $x = l$. Während der Wert der Reihe $= x$ oder $= 0$ ist, je nachdem sich x von kleineren oder von größeren Werten her dem Wert $x = l$ nähert, ist für $x = l$ selber $f(x)$ weder $= l$ noch $= 0$, sondern, wie die Substitution in (176) ergibt:

$$f(l) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} + \frac{2l}{9\pi^2} + \frac{2l}{25\pi^2} + \cdots,$$

oder nach (177):

$$f(l) = \frac{l}{2},$$

also das arithmetische Mittel aus jenen beiden Werten. Dieser Satz läßt sich verallgemeinern, worauf wir aber hier nicht einzugehen brauchen.

§ 39. Wenn speziell $f(x)$ eine „gerade" Funktion ist, d. h. wenn $f(-x) = f(x)$, so folgt aus (175), da die Integration von 0

bis $2l$ ohne weiteres durch die von $-l$ bis $+l$ ersetzt werden kann:

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx$$

und für das erste dieser beiden Teilintegrale, mit Einführung der Integrationsvariabeln $x' = -x$:

$$-\frac{1}{l}\int_{l}^{0} f(-x')\cdot\cos\frac{n\pi x'}{l}\cdot dx' = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x')\cdot\cos\frac{n\pi x'}{l}\cdot dx'.$$

Die beiden Teilintegrale sind also einander gleich, und

$$A_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx. \tag{179}$$

Auf dem entsprechenden Wege findet man $B_n = 0$, da dann die beiden Teilintegrale sich entgegengesetzt gleich sind.

Die Entwicklung einer geraden Funktion in eine Fourier-Reihe mit der Periode $2l$ lautet also einfacher:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{180}$$

wobei die Koeffizienten A nach (179) eindeutig bestimmt sind durch den Verlauf der Funktion innerhalb der halben Periode von 0 bis l. In der Tat ist ja jedes Glied der Reihe, wie auch die Konstante A_0, eine gerade Funktion von x.

Wenn dagegen $f(x)$ eine „ungerade" Funktion ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$, so findet man auf dem nämlichen Wege: $A_n = 0$, und:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx, \tag{181}$$

so daß nun die Fourier-Reihe lautet:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{182}$$

Auch hier sind also die Koeffizienten der Reihe nach (181) eindeutig bestimmt durch den Verlauf der Funktion innerhalb der halben Periode.

§ 40. Wir kehren nun wieder zurück zu dem Problem der Schwingungen einer Saite von der Länge l, und benutzen die in den letzten Paragraphen entwickelte Methode, um die Lösung desselben, nämlich den Ausdruck der Verschiebung v als Funktion von x und t, in eine einzige für alle x und t gültige Form zusammenzufassen. Nach (157) ist:

$$v = f(x + at) + g(x - at).$$

Hier läßt sich die Wellenfunktion g allgemein auf f zurückführen mittels der Grenzbedingung (165), wenn man darin $at - x$ statt x schreibt:

$$f(at - x) + g(x - at) = 0.$$

Also:

$$v = f(x + at) - f(at - x).$$

Nun ist weiter nach (167) $f(x)$ periodisch mit der Periode $2l$. Daher gelten für $f(x + at)$ und $f(at - x)$ die Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man in (170) auf beiden Seiten einmal $at + x$, das andere Mal $at - x$ setzt, oder:

$$v = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos\frac{n\pi}{l}(at + x) + \sum B_n \sin\frac{n\pi}{l}(at + x)$$
$$- \frac{A_0}{2} - \sum A_n \cos\frac{n\pi}{l}(at - x) - \sum B_n \sin\frac{n\pi}{l}(at - x). \quad (183)$$

Die Summationen sind jedesmal von $n = 1$ bis $n = \infty$ zu erstrecken.

Dies ist der allgemeine Ausdruck für die Transversalschwingungen einer Saite von der Länge l. Man kann ihm verschiedene einfachere Formen geben, von denen eine jede ihre eigentümlichen Vorzüge besitzt.

Setzt man:

$$A_n = C_n \cos\vartheta_n, \quad B_n = -C_n \sin\vartheta_n, \quad (184)$$

mit der näheren Bestimmung, daß C_n positiv ist, und daß ϑ_n zwischen 0 und 2π liegt, so kann man schreiben:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at + x) + \vartheta_n\right\} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at - x) + \vartheta_n\right\}. \quad (185)$$

Die allgemeinste Saitenschwingung besteht also in einer Anzahl von paarweise entgegengesetzt gleichen, hin und her laufenden einfach periodischen Wellen, den „Partialwellen", deren jede in bezug auf x die Periode

(186) $$\frac{2l}{n} = \lambda_n,$$

in bezug auf t die Periode

(187) $$\frac{2l}{na} = \tau_n$$

besitzt. Die örtliche Periode λ_n nennt man die „Wellenlänge", die zeitliche Periode τ_n die „Schwingungsdauer" der betreffenden Welle. Die größtmögliche Wellenlänge (für $n = 1$) ist $2l$, also die doppelte Saitenlänge, ihr entspricht die längste Schwingungsdauer: $\frac{2l}{a}$. Diese Schwingung nennt man die „Grundschwingung" der Saite. Die übrigen Wellenlängen und Schwingungsdauern sind die $n$ten Teile der auf die Grundschwingung bezüglichen Größen.

Der reziproke Wert der Schwingungsdauer:

(188) $$\frac{1}{\tau_n} = \nu_n = \frac{na}{2l}$$

bezeichnet die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit und heißt daher die „Schwingungszahl" der betreffenden Welle. Wellenlänge, Schwingungsdauer und Schwingungszahl stehen nach den letzten drei Gleichungen stets in folgendem Zusammenhang:

(189) $$\frac{\lambda_n}{\tau_n} = \lambda_n \nu_n = a.$$

Mit Einführung der Wellenlängen und der Schwingungszeiten lautet die Gleichung (185):

(190) $$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n} + \frac{x}{\lambda_n}\right) 2\pi + \vartheta_n\right\} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n} - \frac{x}{\lambda_n}\right) 2\pi + \vartheta_n\right\}.$$

Der ganze durch die geschweifte Klammer bezeichnete Winkel heißt die „Phase" der betreffenden Welle (I. § 12), die Konstante ϑ_n die „Phasenkonstante".

Der Ausdruck von v vereinfacht sich erheblich, wenn man in (183) oder in (190) die zu einer jeden Ordnungszahl n gehörigen Glieder in ein einziges Glied zusammenfaßt. Dann folgt aus (183):

(191) $$v = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{n\pi at}{l} - B_n \cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Diese Form der Schwingungsgleichung eignet sich am besten dazu, um die Werte der Koeffizienten A_n und B_n aus dem Anfangszustand der Saite zu bestimmen. Für $t = 0$ ist nämlich nach (160) und (191):

$$\left.\begin{aligned} v_0 = F(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = \Phi(x) &= -\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (192)$$

Die Aufgabe, A_n und B_n zu bestimmen, läuft also darauf hinaus, die beiden gegebenen Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ in Fouriersche sin-Reihen zu entwickeln. Das ist aber, wie die Gleichungen (181) und (182) zeigen, stets auf eine einzige Art möglich, da die zu entwickelnden Funktionen gerade innerhalb einer halben Periode der Reihe, von $x = 0$ bis $x = l$, gegeben sind. Man hat nur in (182) statt $f(x)$ $F(x)$ bzw. $\Phi(x)$, statt B_n $2B_n$ bzw. $-\frac{2\pi a}{l} n A_n$ gesetzt zu denken. Dann ergibt sich aus (181):

$$\left.\begin{aligned} 2B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx, \\ -\frac{2\pi a}{l} n A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx, \end{aligned}\right\} \quad (193)$$

und hierdurch sind die Koeffizienten A_n und B_n für alle Werte von n bestimmt.

Andererseits folgt aus (185) durch Vereinigung je zweier entsprechender Partialwellen:

$$v = -2\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (194)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n C_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (195)$$

In dieser Form erscheint die Saitenschwingung als zusammengesetzt aus einer Anzahl von Partialschwingungen, deren jede sich darstellt als die Zusammenfassung der beiden in entgegengesetzter Richtung laufenden Partialwellen der nämlichen Ordnungszahl, und die daher, im Gegensatz zu den „fortschreitenden" Wellen, als

„stehende" Welle bezeichnet wird. Betrachten wir einmal eine einzelne dieser stehenden Wellen, etwa die mit der Ordnungszahl n:

$$(196)\quad \begin{cases} v = -2\,C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \\ \quad = -2\,C_n \sin\left(2\pi \nu_n t + \vartheta_n\right) \sin\frac{2\pi x}{\lambda_n}. \end{cases}$$

Sie stellt für sich allein eine mögliche Schwingung der Saite vor; denn sie erfüllt, wie man ersieht, für $x = 0$ und für $x = l$ die Grenzbedingung $v = 0$. Ihre Eigentümlichkeit ist, daß alle Punkte der Saite die nämliche Phase besitzen; denn der die Zeit t enthaltende Phasenwinkel hängt nicht, wie bei der fortschreitenden Welle, von x ab. Daher gehen z. B. sämtliche Saitenpunkte gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage $v = 0$ und erreichen gleichzeitig ihre größte Elongation. Das Bild der Saite ist jederzeit eine sin-Kurve, und die Bewegung jedes Punktes eine sin-Schwingung, deren Amplitude periodisch von Punkt zu Punkt sich ändert. In den Punkten

$$(196\,a)\qquad x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}, \ldots \frac{n-1}{n} l, l$$

ist die Schwingungsamplitude Null. Diese Punkte heißen daher die „Schwingungsknoten". Sie teilen die Saitenlänge in n gleiche Strecken von der Größe $\frac{l}{n}$, deren jede nach (186) gleich der halben Wellenlänge λ_n der entsprechenden fortschreitenden Welle ist. Bei der Grundschwingung ($n = 1$) sind die beiden Endpunkte der Saite die einzigen Knotenpunkte, bei der zweiten Partialschwingung ($n = 2$) liegt ein Knotenpunkt in der Mitte der Saite, usw. Zwischen je zwei Knotenpunkten erfolgen die Schwingungen, und zwar in je zwei benachbarten Abschnitten nach entgegengesetzten Seiten. Die Maxima der Schwingungsamplituden liegen in der Mitte zwischen den Knoten und heißen die „Bäuche" der Schwingung. Die Grundschwingung besitzt nur einen einzigen Bauch; ebenso ist für jede andere Partialschwingung die Anzahl der Bäuche gleich der Ordnungszahl n der Schwingung. Fig. 8 versinnlicht das Bild der Saite mit den Richtungen der Geschwindigkeiten für $n = 3$.

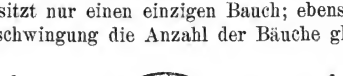

Fig. 8.

§ 41. Die Darstellung einer Saitenschwingung in der Form (194) einer Summe von einfach periodischen Schwingungen besitzt aber außer dem formal-mathematischen auch ein hervorragend physikalisches und physiologisches Interesse, durch ihre Bedeutung für die Akustik. Wenn nämlich die Schwingungen der Saite von der Luft aufgenommen und durch ihre Vermittlung dem Ohre, speziell dem Trommelfell, zugeführt werden, so reagiert das Gehörorgan auf jedes einzelne Glied (196) jener Summe, also auf jede einfach periodische Schwingung, mit einer besonderen Empfindung: der des entsprechenden „Partialtons". Die Schwingungszahl ν_n bestimmt die Höhe des Tones, die Amplitudenkonstante C_n die Stärke desselben, während dagegen die Phasenkonstante ϑ_n keinerlei akustische Bedeutung besitzt. Dem, was man in der Akustik als Qualität des Tones oder als Klangfarbe bezeichnet, entspricht nach den grundlegenden Untersuchungen von Helmholtz kein spezifisches physikalisches Attribut. Vielmehr läßt sich die Klangfarbe einer tönenden Saite stets zurückführen auf die Größenverhältnisse, mit denen die Amplituden C_n der einzelnen Partialtöne in der Schwingung auftreten, und die natürlich sehr wesentlich davon abhängen, in welcher Weise die Saite angeregt worden ist. Je zahlreicher und stärker die höheren Partialtöne auftreten, desto schärfer und schriller wird im allgemeinen der Klang, während der Grundton ($n = 1$) oder auch ein einzelner Partialton für sich alleine weich und leer klingt.

Durch diese ihnen eigentümlichen akustischen Wirkungen gewinnen die Partialschwingungen, und damit die einzelnen Glieder der Fourierschen Reihe einer Welle, auch in physikalischer Hinsicht eine selbständige Bedeutung, und man ist daher leicht geneigt, ihnen auch schon in der Saitenschwingung selber, sowie in der durch die Saitenschwingung angeregten Luftwelle, ganz unabhängig von dem Gehörorgan, eine individuelle Existenz zuzuschreiben. Doch darf man nicht vergessen, daß eine derartige Vorstellung zwar zulässig und in hohem Grade zweckmäßig, aber keineswegs notwendig ist. Denn so lange man nur die Saitenschwingung und die Luftwelle ins Auge faßt, wird die Abhängigkeit der Verschiebung v eines materiellen Punktes von den unabhängigen Variabeln x und t und damit sämtliche Eigentümlichkeiten des physikalischen Vorgangs durch eine einzige Funktion vollständig dargestellt, und es ist nicht ohne Willkür möglich, diese Funktion noch weiter in einzelne Bestandteile zu zerlegen. Die Partialtöne sind also nicht etwa schon

in der Saitenschwingung oder in der Luftwelle als etwas Reales enthalten, sondern sie werden erst im Gehörorgan einzeln ausgesondert.

Der Gehörnerv ist aber nicht nur empfindlich für die absolute Größe einer Schwingungszahl, sondern er reagiert auch in besonders charakteristischer Weise auf das Verhältnis der Schwingungszahlen zweier gleichzeitig auf ihn treffender Tonwellen, indem er deren Zusammenklang dann als passend, harmonisch, konsonant empfindet, wenn dies Verhältnis ein einfaches rationales ist, d. h. durch den Quotienten zweier kleiner ganzen Zahlen dargestellt werden kann. Auf die absolute Höhe der beiden Töne kommt es dabei gar nicht an. Daher mißt man in der Akustik den Abstand zweier verschiedener Töne, das musikalische „Intervall", nicht nach der Differenz, sondern nach dem Verhältnis der Schwingungszahlen, oder, was dasselbe bedeutet, nach der Differenz ihrer Logarithmen. Je einfacher dies Verhältnis ist, um so vollkommener ist die Konsonanz. Da nun nach (188) die Schwingungszahlen ν_n der Partialtöne einer schwingenden Saite sich verhalten wie die Reihe der Ordnungszahlen $1 : 2 : 3 : 4 : \cdots$, so sind die Töne von kleinerer Ordnungszahl mit dem Grundton und auch miteinander konsonant und werden daher auch als „harmonische Obertöne" bezeichnet.

Das einfachste Intervall ist, abgesehen von dem „Einklang" $1 : 1$, das Verhältnis $2 : 1$, oder die „Oktave". Hier ist der Zusammenklang der beiden Töne ein so vollkommener, daß sie oft zu einer einzigen Empfindung verschmelzen und dann selbst von geübten Ohren nur schwer oder gar nicht voneinander unterschieden werden können. Danach kommt das Verhältnis $3 : 2$, oder die „Quinte", dann $4 : 3$, oder die „Quarte". Eine Quinte und eine Quarte geben zusammen eine Oktave. Denn

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

Allgemein nennt man ein Intervall, welches ein anderes Intervall zu einer Oktave ergänzt, die „Umkehrung" desselben. Daher ist die Quarte die Umkehrung der Quinte. Weiter kommt das Verhältnis $5 : 4$, oder die „große Terz", und ihre Umkehrung $8 : 5$, die „kleine Sexte"; sodann das Verhältnis $6 : 5$, oder die „kleine Terz", und ihre Umkehrung $5 : 3$, die „große Sexte". Damit ist die Zahl der gewöhnlich als konsonant bezeichneten Intervalle erschöpft, soweit man sich auf Intervalle beschränkt, die innerhalb einer Oktave liegen, also < 2 sind. Größere Intervalle führt man ge-

wöhnlich durch Division mit einer ganzen Potenz von 2 auf solche < 2 zurück.

Zur Bezeichnung der Töne teilt man zunächst den ganzen Tonbereich in Oktaven ein, indem man von einem willkürlich durch allgemeine Übereinkunft festgesetzten Normalton ausgeht: nach der Pariser Stimmung dem Ton $\nu_0 = 261$, dem eingestrichenen c', welches für die Männer- und die Frauenstimme, sowie für die wichtigsten Instrumente bequem erreichbar ist, und von da mit Oktavenschritten einerseits hinaufgeht bis zum fünfgestrichenen c'''': $\nu = 261 \cdot 2^4$, andererseits hinabgeht zum kleinen c, großen C, Kontra C_1 und Subkontra C_{11}: $\nu = 261 \cdot 2^{-4}$. Schallwellen, deren Schwingungszahl jenseits der angegebenen Grenzen liegen, lösen keine Tonempfindung mehr aus, sondern wirken höchstens mechanisch auf das Ohr, in der Höhe stechend, in der Tiefe schwirrend. Den Tonbezirk zwischen dem eingestrichenen c' und dem zweigestrichenen c'' nennt man die eingestrichene Oktave, und ebenso trägt jeder andere Oktavenbezirk den Namen desjenigen c, welches ihn nach unten begrenzt. Alle Töne, welche sich nur durch Oktaven unterscheiden, werden mit dem nämlichen Buchstaben bezeichnet, und die Lage der Oktave auf dieselbe Weise kenntlich gemacht wie oben bei den verschiedenen c.

So besitzt eine Saite mit dem Grundton C (tiefste Cellosaite) die folgenden harmonischen Obertöne:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ···
Partialton	C	c	g	c'	e'	g'		c''	d''	e''

Die Obertöne $n = 7, 11, 13, 14, \cdots$ werden in der modernen Musik nicht benutzt und daher auch nicht besonders bezeichnet. Daß aber doch die sogenannte natürliche Septime 7 : 4 der kleinen Septime 9 : 5, der sie am nächsten liegt, an Wohlklang gelegentlich überlegen ist, empfindet man aufs deutlichste, sobald man in die Lage kommt, diese beiden Intervalle unter passenden Umständen im Gehör miteinander zu vergleichen. Ohne Zweifel beruht auch die wichtige Rolle, welche der sog. Dominantseptimakkord (Grundton, große Terz, Quint, kleine Septime) in der Musik spielt, auf dem Umstand, daß die Intervalle dieses Akkordes nahezu durch die Verhältnisse 4 : 5 : 6 : 7 dargestellt werden.

§ 42. Die konsonanten Intervalle bilden die Grundlage aller praktischen Musik. Von diesem Naturgesetz wird sich die Kunst niemals ungestraft entfernen können. Die Gesamtheit aller Töne,

welche man, von einem Normalton ν_0 ausgehend, durch Fortschreiten nach gewissen konsonanten Intervallen erreichen kann, bilden ein natürliches Tonsystem. Die Schwingungszahlen der zu einem bestimmten Tonsystem gehörigen Töne lassen sich durch einen einzigen einfachen mathematischen Ausdruck darstellen. Beschränkt man sich auf Oktavenschritte, so sind die Schwingungszahlen von der Form:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n, \tag{197}$$

wobei n irgendeine ganze, positive oder negative, Zahl bedeutet. Diese Töne unterscheiden sich nur durch Oktaven von dem Normalton, sie stellen also keine für die praktische Musik ausreichende Mannigfaltigkeit vor. Läßt man dagegen auch Quinten zu, so erhält man Töne von den Schwingungszahlen:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p, \tag{198}$$

wo p ebenfalls eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet. Alle Töne, deren Schwingungszahlen in der Form (198) darstellbar sind, bilden das pythagoräische Tonsystem. Dasselbe umfaßt praktisch genommen sämtliche reproduzierbare Töne und daher auch sämtliche Intervalle; denn jede beliebige Zahl läßt sich, wenn auch nicht genau, so doch mit jeder gewünschten Annäherung, durch (198) darstellen. So wird z. B. die große Terz 5 : 4 schon mit einigermaßen brauchbarer Annäherung gewonnen durch vier Quintenschritte aufwärts und zwei Oktavenschritte abwärts, also durch das Intervall $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{64}$, die sogenannte pythagoräische Terz, welche etwas größer ist als die natürliche Terz. Der Unterschied dieser beiden Terzen beträgt $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$, ein sogenanntes „syntonisches Komma“. Durch Vermehrung der Anzahl Quinten und Oktaven läßt sich natürlich ein noch besserer Anschluß erzielen. Absolut genommen ist es allerdings unmöglich, selbst bei noch so großer Häufung der Schritte, jemals das Intervall einer natürlichen Terz durch Quinten und Oktaven zu erreichen, und insofern hat das pythagoräische Tonsystem etwas Unbefriedigendes. Besser entspricht dem theoretischen Bedürfnis das durch Terzenschritte bereicherte Tonsystem

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p \cdot 5^q, \tag{199}$$

welches in der Tat für die Musik lange Zeit hindurch die Grundlage abgegeben hat.

Jedoch auch diesem System, wie überhaupt allen natürlichen Tonsystemen, haftet der praktisch schwer wiegende Übelstand an,

daß jedes derselben streng genommen eine unbegrenzte Anzahl von Tönen umfaßt, während die praktische Musik, besonders seit der Einführung der Instrumente mit festen Tönen (Orgel, Klavier), mit einer endlichen, nicht zu zahlreichen Menge von Tönen auskommen muß. Bricht man aber das Tonsystem bei bestimmten Grenzwerten der Zahlen n, p, q, also nach einer bestimmten Anzahl von Intervallen, willkürlich ab, so werden dadurch die Töne an den Grenzen benachteiligt, da es unmöglich ist, von ihnen aus weiter fortzuschreiten, während doch gerade eine unbeschränkte Modulationsfähigkeit ein Hauptbedürfnis der neueren Musik bildet. Dieser Übelstand wurde auf die Dauer so unerträglich, daß man sich entschlossen hat, einer radikalen Hebung desselben die absolute Reinheit des natürlichen Tonsystems zu opfern und die konsonanten Intervalle ein wenig abzuändern, zu „temperieren". Unter allen künstlichen Tonsystemen hat sich das sogenannte zwölfstufige temperierte System seit seiner Einführung durch Joh. Seb. Bach als das weitaus brauchbarste durchgesetzt. In diesem System sind alle Oktaven, als die wichtigsten Konsonanzen, absolut rein, die Quinten dagegen sind temperiert, wobei von dem Umstand ausgegangen wird, daß zwölf Quinten, also $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$, nahezu gleich sind sieben Oktaven, also 2^7. Der Unterschied beträgt $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \text{ca.}\frac{74}{73}$, ein sogenanntes „pythagoräisches Komma". Wenn man nun alle diese zwölf Quinten gleichmäßig verkleinert, und zwar soweit, daß sie miteinander genau sieben Oktaven ergeben, so erhält man für das Intervall x einer temperierten Quinte die Bedingungsgleichung

$$x^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1 \qquad (200)$$

oder:

$$x = 2^{\frac{7}{12}} = 1{,}498.$$

Der Unterschied zwischen einer reinen und einer temperierten Quinte beträgt demnach nur:

$$1{,}5 : 1{,}498 = \text{ca.}\frac{886}{885},$$

und ist selbst für das geübteste Ohr nicht direkt wahrnehmbar.

Verlegt man die zwölf Töne, zu denen man durch die zwölf temperierten Quintenschritte gelangt, durch passende Oktavenschritte in einen gemeinsamen Oktavenbezirk, etwa in die kleine

Oktave, von c bis c', so wird derselbe in zwölf gleiche Intervalle geteilt, nach dem Schema:

2^0	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	$2^{\frac{12}{12}}$
c	cis = des	d	dis = es	e	f	fis = ges	g	gis = as	a	ais = b	h	c'

und die dadurch bestimmten Töne bilden das temperierte System, welches sich nun in jeder Oktave genau in derselben Weise wiederholt.

Das Intervall je zweier benachbarter Töne ist der temperierte Halbton:

$$2^{\frac{1}{12}} = 1{,}0595.$$

Die temperierte große Terz besteht aus vier Halbtönen; sie ist größer als die natürliche Terz, nämlich um:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \frac{4}{5} = \text{ca. } \frac{126}{125},$$

aber kleiner als die pythagoräische Terz, da das letztberechnete Intervall den Betrag eines syntonischen Kommas $\frac{81}{80}$ nicht erreicht.

In der Theorie der konsonanten Intervalle hat sich ein wohlbegreifliches Widerstreben, der absoluten Anpassung an die Natur bewußt zu entsagen, manchmal in Angriffen gegen die temperierte Stimmung und in der Forderung einer Rückkehr zur natürlichen Stimmung Luft gemacht. Demgegenüber ist zu bedenken, daß die Frage der Berechtigung einer Stimmung in der praktischen Musik nicht vor das Forum der Wissenschaft gehört. In der Kunst aber entscheiden nicht theoretische Gründe, sondern einzig und allein die tatsächliche ästhetische Wirkung. Daher wird dasjenige Tonsystem stets den ersten Platz einnehmen, welches über die wirksamsten künstlerischen Ausdrucksmittel verfügt. So wird auch die natürliche Stimmung ihre praktische Bedeutung erst dann wiedergewinnen können, wenn einmal ein Meister ersteht, der in der Sprache der natürlichen Stimmung mehr und Eindringlicheres zu sagen weiß, als man in einer anderen Stimmung auszudrücken vermag.

§ 43. Von der Abschweifung in das Gebiet der Kunst wollen wir uns nun wieder der allgemeinen Akustik zuwenden, und richten unsere Aufmerksamkeit zunächst einmal auf die merkwürdige Tatsache, daß das Ohr, indem es aus einer auftreffenden Klangwelle die einzelnen Partialtöne heraushört, im Grunde genau dasselbe vollbringt, was der Mathematiker tut, wenn er aus einer ihm

vorgelegten periodischen, im übrigen aber beliebig komplizierten Funktion nach den Gleichungen (175) mittels der dort vorgeschriebenen Integrationen die einzelnen Koeffizienten A_n und B_n der entsprechenden Fourierschen Reihe berechnet. Denn die Reize, auf die der Gehörnerv reagiert, sind bis in alle ihre Einzelheiten vollständig enthalten in der Art, wie das Trommelfell durch die ankommende Luftwelle erregt wird, sie werden also vollständig erschöpfend dargestellt durch eine einzige Funktion der Zeit $f(t)$, welche die jeweilige Verschiebung des Trommelfells aus seiner Gleichgewichtslage angibt, und im Ohr wird mit der Zerlegung des Klanges in seine Partialtöne zugleich die Darstellung von $f(t)$ als Fouriersche Reihe vollzogen. Von dieser aus Wunderbare grenzenden Leistungsfähigkeit des Gehörorgans macht man sich einen Begriff, wenn man bedenkt, daß das geübte Ohr eines Dirigenten in der Klangmasse einer Chormusik mit Orchester nicht nur die Töne und Klangfarben der einzelnen Instrumente, sondern auch die einzelnen Buchstaben der gesungenen Worte zu unterscheiden vermag. In dieser Beziehung ist das Ohr dem Auge unendlich überlegen. Denn eine Farbe: weiß, grün, blau, empfinden wir immer als etwas Einheitliches und sind durchaus nicht imstande, unmittelbar anzugeben, ob und wie sich diese Farbe physikalisch aus anderen Farben zusammensetzt.

Es erhebt sich nun für uns die fundamentale Frage: Wie vermag das Ohr solche Leistungen zu vollbringen, und welche physikalischen Vorgänge liegen der Zerlegung eines Klanges in seine Partialtöne zugrunde? Eine Antwort hierauf hat Helmholtz gegeben, indem er von der Annahme ausging, daß mit dem subjektiven Vorgang: der Empfindung eines bestimmten Partialtones von der Schwingungszahl ν, jedesmal ein bestimmter objektiver Vorgang: die pendelartige Schwingung eines gewissen elementaren materiellen Gebildes im inneren Ohr mit der nämlichen Schwingungszahl ν, verbunden ist, und umgekehrt. Soviele verschiedene Partialtöne das Gehör zu empfinden vermag, ebensoviele verschiedene derartige Elementarpendel befinden sich, wie die Saiten einer Harfe nebeneinander gereiht, im Innern des Ohres. Wenn nun das Trommelfell durch eine ankommende Luftwelle zu Schwingungen $f(t)$ angeregt wird, so wird der Partialton ν gehört oder nicht, je nachdem dasjenige Elementarpendel, welchem die Schwingungszahl ν eigen ist, durch die Erschütterung des Trommelfells in merkliche Schwingungen versetzt wird oder nicht. Die

Frage, ob in einer Klangwelle $f(t)$ der Partialton ν enthalten ist, läuft also im Grunde darauf hinaus, ob eine Kraft von der Größe $f(t)$ ein Pendel von der Schwingungsperiode $\tau = \frac{1}{\nu}$ in merkliche Schwingungen zu versetzen vermag. Diese Frage findet nun aber ihre exakte Beantwortung in der allgemeinen Mechanik, und zwar in folgender Weise:

Ein Pendel von bestimmter Schwingungsperiode $\tau = \frac{1}{\nu}$ wird nach I. § 13 dargestellt durch einen materiellen Punkt, der um eine stabile Gleichgewichtslage $x = 0$ kleine Schwingungen ausführt. Wenn die Schwingungen durch einen einmaligen Anstoß verursacht sind, im übrigen aber ohne äußere Störung verlaufen, so erfolgen sie nach der Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x, \tag{201}$$

welche sich aus I. (15) ergibt, wenn man darin die Konstante c durch die Schwingungszahl ν ersetzt, nach der Beziehung:

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \tau = \frac{1}{\nu}. \tag{202}$$

In diesem Fall führt das Pendel „freie" Schwingungen aus, deren Periode τ daher auch als die „Eigenperiode" des Pendels bezeichnet wird.

Wenn aber noch eine äußere Kraft $f(t)$ auf das Pendel wirkt, so vollführt es „erzwungene" Schwingungen, nach Maßgabe der Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x + f(t). \tag{203}$$

Berechnen wir die erzwungenen Schwingungen zunächst einmal für den speziellen Fall, daß die äußere Kraft $f(t)$ einfach periodisch ist, also von der Form:

$$f(t) = C \cos(2\pi \nu' t + \vartheta), \tag{204}$$

unter der weiteren Annahme, daß im Anfangszustand für $t = 0$ das Pendel in seiner Gleichgewichtslage ruht, also $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = 0$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 m \nu^2 x = C \cos(2\pi \nu' t + \vartheta) \tag{205}$$

ist von der Form:

$$x = \alpha \cos(2\pi\nu t + \vartheta_0) + \beta \cos(2\pi\nu' t + \vartheta). \qquad (206)$$

Setzt man nämlich diesen Ausdruck von x in (205) ein, so reduziert sich die linke Gleichungsseite auf die Glieder mit β, und es ergibt sich:

$$\beta = \frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2 - \nu'^2)}, \qquad (207)$$

während α und ϑ_0 ganz unbestimmt bleiben und daher die beiden Integrationskonstanten darstellen. Paßt man ihre Werte dem Anfangszustande an und setzt sie dann nebst dem Wert von β in (206) ein, so ergibt sich die gesuchte Pendelschwingung:

$$x = \frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2 - \nu'^2)} \times$$
$$\left\{-\cos\vartheta \cos 2\pi\nu t + \frac{\nu'}{\nu} \sin\vartheta \sin 2\pi\nu t + \cos(2\pi\nu' t + \vartheta)\right\}. \qquad (208)$$

Das Pendel wird also aus seiner Ruhelage in eine Bewegung versetzt, die im allgemeinen aus Schwingungen von zwei verschiedenen Perioden besteht, deren Schwingungszahlen ν und ν' der Eigenschwingung und der äußeren erregenden Schwingung entsprechen.

Eine Ausnahme jedoch bildet der Fall, daß die Periode der erregenden Schwingung übereinstimmt mit der der Eigenschwingung, also daß $\nu' = \nu$. Dann nimmt nämlich der Ausdruck (208) zunächst die Form $\frac{0}{0}$ an, und man gelangt zu dem wahren Wert desselben, wenn man $\nu' = \nu + \Delta\nu$ setzt, dann Zähler und Nenner nach Potenzen von $\Delta\nu$ entwickelt, und schließlich zur Grenze $\Delta\nu = 0$ übergeht:

$$x = \frac{C}{8\pi^2 m\nu^2} \cdot \left\{2\pi\nu t \sin(2\pi\nu t + \vartheta) - \sin 2\pi\nu t \sin\vartheta\right\}. \qquad (209)$$

Natürlich kann man sich auch hinterher leicht direkt überzeugen, daß in der Tat der Ausdruck (209) sowohl die Anfangsbedingungen als auch die Differentialgleichung (205) für $\nu' = \nu$ befriedigt.

Diese Bewegung des Pendels ist nun, wegen des Faktors t vor dem sin, total verschieden von der durch (208) dargestellten, nicht nur nach ihrem Gesetz, sondern sogar nach der Größenordnung. Denn sie besteht nicht aus periodischen Schwingungen, sondern sie wächst mit der Zeit ins Unendliche. Daraus folgt, daß eine äußere periodische Kraft von noch so kleiner Amplitude C, wenn ihre Periode

nur übereinstimmt mit der Eigenperiode des Pendels, im Laufe der Zeit eine größere Wirkung hervorbringt als eine beliebig groß angenommene Kraft von irgendeiner anderen Periode. Man sagt dann, daß die erregende Kraft sich mit dem Pendel in Resonanz befindet. Die Resonanz liefert die Erklärung für zahlreiche auffallende Naturerscheinungen, selbstverständlich nicht allein im Gebiet der Akustik. Wenn eine schwache Luftwelle die Zinken einer großen Stimmgabel zum Tönen bringt, oder wenn ein kleiner Knabe eine zentnerschwere Kirchenglocke in kräftige Schwingungen versetzt, oder wenn eine starke Brücke durch taktmäßige Schritte von Passanten in gefährliche Schwankungen gerät, so sind dies alles Wirkungen der Resonanz, und es liegt sehr nahe, anzunehmen, daß, wie in der Akustik und Elektrodynamik, so auch in der Chemie, ja sogar in der Biologie die Heftigkeit vieler Reaktionen im Grunde auf Resonanz zurückzuführen ist.

Nehmen wir nun allgemeiner an, daß die das Pendel erregende Kraft nicht einfach periodisch ist, sondern sich aus einer Reihe von einfach periodischen Schwingungen zusammensetzt, also etwa durch eine Fouriersche Reihe ausgedrückt wird, wodurch, wie wir wissen, zugleich der allgemeinste Fall dargestellt wird, so werden die Schwingungen des Pendels im Laufe der Zeit ins Unendliche wachsen oder nicht, je nachdem in der Fourierschen Reihe ein Glied mit der Eigenschwingung des Pendels enthalten ist oder nicht. Auf die Größe des Koeffizienten dieses Gliedes im Verhältnis zu den anderen Gliedern der Fourier-Reihe kommt es dabei gar nicht an. Das Pendel zeigt also durch die Art, wie es auf die erregende Schwingung reagiert, das Vorhandensein des entsprechenden Gliedes in der Fourierschen Reihe an, es dient durch seine Resonanz zu einer Analysierung der Reihe, und wird daher auch als „Resonator" bezeichnet. Ein Resonator spricht nur auf diejenige Schwingung merklich an, welche seiner Eigenperiode entspricht, die Wirkung ist daher eine auswählende, „selektive". Durch die Resonanzwirkung erhalten die Glieder einer Fourierschen Reihe auch einzeln eine physikalische Bedeutung, während bisher nur ihre Summe physikalisch zu definieren war.

Gehen wir nun noch etwas näher auf den quantitativen Zusammenhang zwischen der erregenden Kraft $f(t)$ und der Energie der durch sie bewirkten Schwingung des Resonators ein. Wir betrachten den Vorgang während eines gewissen Zeitintervalls, und nehmen die erregende Kraft $f(t)$ so schwach an, daß während

dieses Zeitintervalls das Pendel nahezu wie ein freies, d. h. periodisch, schwingt. Dann ist für ein Zeitelement dt die Änderung der Schwingungsenergie E (kinetische und potentielle Energie zusammengenommen) nach I. (393):

$$dE = \mathfrak{F}_x \cdot dx = f(t) \cdot dx$$

oder:

$$dE = f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt.$$

Also die Energieänderung in der Zeit von t bis t':

$$E' - E = \int_t^{t'} f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt. \tag{210}$$

Je nachdem nun die Pendelausschläge x während des betrachteten Zeitintervalls durch $\cos 2\pi\nu t$ oder durch sin $2\pi\nu t$ dargestellt werden, wird $\frac{dx}{dt}$ proportional sin $2\pi\nu t$ oder cos $2\pi\nu t$, und das Integral (210) nimmt genau dieselben Formen an wie die Integrale (175), welche zur Berechnung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe für die Funktion $f(t)$ dienen, nur daß die Integrationsvariable dort mit x und hier mit t bezeichnet ist. Denken wir uns also eine große Reihe solcher Resonatorenpendel mit passenden Schwingungsperioden und Schwingungsphasen nebeneinander aufgestellt und alle gleichzeitig der nämlichen erregenden Kraft $f(t)$ ausgesetzt, so zeigt jedes Pendel durch die Energie seiner Schwingung die Größe des entsprechenden Koeffizienten in der Fourierschen Reihenentwicklung von $f(t)$ an, und dieser Vorgang ist nach Helmholtz im Grunde identisch mit demjenigen, welcher sich im Ohre vollzieht, wenn jede auf eine bestimmte Schwingungszahl ansprechende Gehörfaser durch Resonanzwirkung ihren Ton aus den Schwingungen des Trommelfells aufnimmt und an den Empfindungsnerven weitergibt.

Wir erkennen daraus, daß nicht nur, wie zu Beginn dieses Paragraphen ausgeführt wurde, das Gehör dieselbe Zerlegung der Schallwelle vollzieht, welche der Verwandlung dieser Welle in eine Summe einfach periodischer Wellen entspricht, sondern daß die Natur sich dabei auch der nämlichen Methode bedient wie die Mathematik. Denn die letzte Gleichung (210) ist geradezu eine mechanische Illustration der mathematischen Definition der Reihenkoeffizienten in (175). Mit dieser Erkenntnis ist die Fähigkeit des Ohres, einen Klang in seine Teiltöne zu zerlegen, auch physikalisch vollkommen verständlich geworden.

Eine andere prinzipiell wichtige Frage ist die nach einer Erklärung für die eigentümliche Klangwirkung der konsonanten Intervalle. Auch hier hat Helmholtz eine Theorie entwickelt, nach welcher der Begriff der Konsonanz nicht etwa einem gewissen unbewußten Wohlgefallen mystischer Herkunft entstammt, welches der Gehörnerv an dem Auftreten einfacher rationaler Zahlenverhältnisse besitzt, sondern daß hier auch ganz bestimmte reale, physikalisch definierbare Umstände maßgebend sind, die im Falle der Konsonanz Behagen, im Falle der Dissonanz Unbehagen bewirken. Eine kurze Besprechung derselben werden wir besser im nächsten Kapitel vornehmen, in welchem von den akustischen Luftwellen die Rede sein soll (§ 46).

Viertes Kapitel. Schwingungsvorgänge in Flüssigkeiten und Gasen.

§ 44. Unter den isotropen vollkommen elastischen (§ 21) Körpern sind die Flüssigkeiten und Gase als ein spezieller Fall dadurch ausgezeichnet, daß für sie die drei Hauptdrucke (§ 20) einander gleich sind, woraus folgt, daß auf jedes Flächenelement ein senkrechter, von der Orientierung des Flächenelements unabhängiger Druck $X_x = Y_y = Z_z = p$ wirkt, positiv, wenn der Körper auf Kompression in Anspruch genommen wird. Da die Tangentialdrucke verschwinden, so verschwindet auch die Elastizitätskonstante μ in den Gleichungen (119), und der Druck ist allein vom Volumen abhängig, bzw. von der Dichtigkeit k:

$$p = f(k). \tag{211}$$

Die Form der Funktion f hängt ab von der Natur des Körpers. Bei den tropfbaren Flüssigkeiten ist p außerordentlich stark mit k veränderlich, so daß man für diese besser k als Funktion von p darstellt. Den Grenzfall bilden die inkompressibeln Flüssigkeiten, für die k konstant ist. Näheres über die Form von f werden wir später, bei der Behandlung endlicher Deformationen (§ 56), besprechen.

Wenn wir im Interesse der Allgemeinheit die folgenden Untersuchungen sowohl auf tropfbare Flüssigkeiten als auch auf Gase erstrecken, so empfiehlt es sich, von einer Erweiterung der Gleichungen (119) Gebrauch zu machen, die wir schon im § 33 einführten, indem wir im deformationslosen Zustand ($\sigma = 0$) den Druck p nicht gleich Null, sondern etwa gleich p_0 annehmen, da

ein Gas im stabilen Gleichgewicht immer einen endlichen Druck besitzt. Dann gehen die sechs Gleichungen (119) über in die einzige Gleichung:

$$p = p_0 - \lambda\sigma. \tag{212}$$

Der Elastizitätskoeffizient λ ist bedingt durch die Kompressibilität, da

$$\frac{-\sigma}{p - p_0} = \frac{1}{\lambda}, \tag{213}$$

und läßt sich für jeden Zustand der Substanz berechnen, wenn die Funktion f in (211) gegeben ist. Denn da die Masse eines Körperelements vom Volumen dV unveränderlich ist, so gilt für eine unendlich kleine Volumendilatation σ die Beziehung:

$$dV \cdot k = dV(1 + \sigma) \cdot (k + dk), \tag{213a}$$

also:

$$\sigma = -\frac{dk}{k}$$

und aus (213):

$$\lambda = k\frac{dp}{dk}. \tag{214}$$

Die Bewegungsgleichungen wollen wir, da der flüssige und gasförmige Zustand sich als eine Spezialisierung des festen auffassen läßt, unmittelbar denen für feste Körper entnehmen und dabei auch wieder die Gravitationskräfte fortlassen. Dann ergibt sich aus (147) und (212):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z}$$

oder in Vektorform, wenn man noch die Konstante

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{dp}{dk} = a^2 \tag{215}$$

setzt:

$$\ddot{\mathfrak{q}} = a^2 \cdot \operatorname{grad}\sigma. \tag{216}$$

Unterwerfen wir diese Gleichung der Vektoroperation rot (§ 13), so folgt mit Berücksichtigung von (65):

$$\ddot{\mathfrak{v}} = 0,$$

und durch zweimalige Integration dieser Gleichung nach t:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{c}_1 t + \mathfrak{c}_2,$$

d. h. die Komponenten ξ, η, ζ der Drehung eines Massenteilchens sind lineäre Funktionen der Zeit; die Drehung wird also, wenn der Vektor $\mathfrak{c}_1$ nicht Null ist, mit der Zeit ins Unendliche wachsen. Da wir nun hier uns mit unendlich kleinen Schwingungen um die

Gleichgewichtslage beschäftigen wollen, und daher auch eine zeitlich konstante Drehung für uns kein Interesse hat, so beschränken wir uns auf die Betrachtung des Falles, daß beide Konstanten c_1 und c_2 verschwinden, mithin:

$$\mathfrak{o} = \operatorname{rot} \mathfrak{q} = 0 . \tag{217}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\mathfrak{q} = -\operatorname{grad} \varphi , \tag{218}$$

wo φ irgendeine skalare Funktion des Ortes und der Zeit bedeutet. Da diese Funktion zu dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{q}$ in der nämlichen Beziehung steht wie nach I. (121) das Potential U zu dem Kraftvektor $\mathfrak{F}$, so kann man φ auch als das „Verschiebungspotential" bezeichnen. Die Existenz eines Verschiebungspotentials ist also gleichbedeutend damit, daß bei der Verschiebung keine Drehungen vorkommen. In der Größe φ des Verschiebungspotentials bleibt, wie man aus (218) sieht, eine additive Zeitfunktion physikalisch ganz bedeutungslos und daher nur durch eine willkürliche Festsetzung definierbar.

Wenn das Verschiebungspotential φ als Funktion von x, y, z, t bekannt ist, so folgen daraus eindeutig alle Einzelheiten der Bewegung. Zunächst erhält man nämlich aus (218) für die Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathfrak{q}} = -\operatorname{grad} \dot{\varphi} . \tag{219}$$

Also auch die Geschwindigkeit hat ein Potential: das „Geschwindigkeitspotential". Ferner folgt für die Volumendilatation aus (66):

$$\sigma = \operatorname{div} \mathfrak{q} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi , \tag{220}$$

und für die Druckschwankung aus (212):

$$p - p_0 = -\lambda\sigma = \lambda \cdot \Delta\varphi . \tag{221}$$

Die ganze Aufgabe reduziert sich daher darauf, das Verschiebungspotential φ zu finden. Hierzu dient die aus den Bewegungsgleichungen (216) folgende Differentialgleichung:

$$\operatorname{grad} \ddot{\varphi} = a^2 \cdot \operatorname{grad} \Delta\varphi ,$$

welche nach den drei Koordinatenrichtungen integriert lautet:

$$\ddot{\varphi} = a^2 \cdot \Delta\varphi . \tag{222}$$

Eine dabei auftretende Integrationskonstante kann nur von der Zeit allein abhängen, sie darf daher als physikalisch bedeutungslos ohne weiteres weggelassen werden.

Die Gleichung (222), welche, wie man sich leicht durch differentiieren überzeugt, nicht nur für das Verschiebungspotential φ, sondern auch für jede Komponente der Verschiebung und der Geschwindigkeit, sowie auch für die Volumendilatation σ und für den Druck p gilt, stellt eine Verallgemeinerung der Gleichung (155) für die Schwingungen einer gespannten Saite vor, und wird daher auch als räumliche „Wellengleichung" bezeichnet. Die Konstante a spielt dabei natürlich wieder die Rolle der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Doch sind die hier zu betrachtenden Wellen insofern grundverschieden von denen bei einer transversal schwingenden Saite, als hier nicht Drehungen, sondern Dichtigkeits- und Druckänderungen es sind, welche die elastischen Wirkungen bedingen.

Wie schon bei den Problemen der Statik (§ 28) betont wurde, interessiert uns vom physikalischen Standpunkt aus stets weniger die allgemeine Lösung der charakteristischen Differentialgleichung, als vielmehr solche partikuläre Lösungen, welche gewissen wichtigen Vorgängen in der Natur möglichst angepaßt sind. Wir betrachten im folgenden einige derselben.

§ 45. Die einfachste partikuläre Lösung der Differentialgleichung (222) liefert der spezielle Fall, daß die Funktion φ nur von einer einzigen Raumvariabeln, etwa x, abhängt. Dann reduziert sich die Gleichung (222) auf die einfache Form (155) und stellt daher zwei Wellen vor, welche mit der Geschwindigkeit a nach den Richtungen der positiven und der negativen x-Achse fortschreiten. Da der physikalische Zustand aller in einer zur x-Achse senkrechten Ebene gelegenen materiellen Teilchen jederzeit der nämliche ist, so heißen diese Wellen ebene Wellen, und jede Ebene $x = \text{const}$ eine „Wellenebene", die darauf senkrechte Richtung x die „Wellennormale". Die Form der Wellen wird durch den Anfangszustand und die Grenzbedingungen bestimmt. Da das Verschiebungspotential φ außer von der Zeit nur von x abhängt, so ist von den drei Verschiebungskomponenten nur u von Null verschieden, die Schwingungen erfolgen also in der Richtung der Fortpflanzung, und die Wellen sind, im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel behandelten transversalen Saitenschwingungen, longitudinal.

Ebene Wellen lassen sich annähernd verwirklichen u. a. dadurch, daß man die Flüssigkeit oder das Gas, etwa Luft, in ein langes zylindrisches hinreichend enges Rohr einschließt. Dann dient das Rohr als „Pfeife", die normalen Querschnitte sind die Wellenebenen, und die Luftschwingungen erfolgen lediglich in der

Längsrichtung, die wir zur x-Achse machen, nach denselben Gesetzen, die wir oben bei den Saitenschwingungen kennen gelernt haben. Daher erübrigt es sich, hier auf die Einzelheiten näher einzugehen. Nur die Einführung der Grenzbedingungen erfordert noch eine besondere Besprechung. Das Ende einer Pfeife kann offen oder geschlossen sein. Im letzteren Falle ist dort $u = 0$, weil die Luft weder in die Gefäßwand eindringen, noch sich von ihr entfernen kann. Diese Grenzbedingung entspricht also ganz der am Ende einer festgeklemmten Saite. Im ersten Fall aber ist in dem offenen Endquerschnitt nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung der Druck p der in der Pfeife schwingenden Luft auf die äußere atmosphärische Luft gleich dem Druck der Atmosphäre auf die Luft in der Pfeife, also konstant $= p_0$, d. h. $\sigma = 0$, oder die Dichtigkeit ist zeitlich konstant. Danach ergeben sich eindeutig die Gesetze für die Luftschwingungen in offenen und gedackten Pfeifen. Ist zunächst die Pfeife an beiden Enden geschlossen, so haben wir, wie in § 40, stehende Schwingungen von der Form (194), wo nur u statt v gesetzt zu denken ist. Die Anregung der Schwingungen kann etwa durch eine äußere Erschütterung oder durch ein kleines Anblaseloch erfolgen. An jedem Ende der Pfeife befindet sich ein Knotenpunkt der Verschiebung u und der Geschwindigkeit $\dot{u}$. Die Lage der übrigen Knotenpunkte bei der $n$ten Partialschwingung ist in (196a) dargestellt. In der Mitte zwischen zwei benachbarten Knoten befindet sich ein Schwingungsbauch. Fragen wir nun nach der Volumendilatation, so ergibt sich hierfür aus (194):

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \vartheta_n\right) \cdot \cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{223}$$

Man ersieht daraus, daß die Volumendilatation, und mit ihr die Druckschwankung, an beiden Enden der Pfeife einen Bauch besitzt, und daß die Knotenpunkte der Volumendilatation: $\sigma = 0$, d. h. diejenigen Stellen, wo Dichtigkeit und Druck der Luft dauernd konstant sind, gerade in den Bäuchen der Verschiebung und der Geschwindigkeit liegen, mitten zwischen den Knotenpunkten derselben.

Denkt man sich nun die schwingende Pfeife in einem solchen Knotenpunkt der Dilatation $\sigma = 0$ durchgeschnitten und die Öffnung mit der freien Atmosphäre kommunizierend, so wird dadurch der Verlauf der Schwingungen in keiner der beiden Pfeifenteile gestört,

weil ja die oben aufgestellte Grenzbedingung in der Öffnung erfüllt ist. Daraus ergibt sich das Gesetz für die Schwingungen in einer offenen oder teilweise offenen Pfeife. Ist die Pfeife beiderseits offen, so besitzt die Volumendilatation an jedem Ende einen Knoten, die Verschiebung einen Bauch. Die Reihe der Partialtöne ist ganz dieselbe wie bei einer beiderseits geschlossenen Pfeife oder bei einer beiderseits festgeklemmten Saite, es haben nur die Knoten und die Bäuche ihre Rollen vertauscht. Bei der Grundschwingung besitzt also σ einen einzigen Bauch, u einen einzigen Knoten in der Mitte der Pfeife.

Wesentlich anders aber wird das Gesetz der Teiltöne in einer gedackten Pfeife, die einerseits geschlossen, andrerseits offen ist. Hier besitzt die Verschiebung u am einen Ende einen Knoten, am andern Ende einen Bauch. Daher hat in dieser Pfeife die Grundschwingung im Innern weder Knoten noch Bäuche vielmehr ist bei der Grundschwingung die ganze Länge der Pfeife gleich dem Abstand zwischen Knoten und Bauch, d. h. gleich der Hälfte des Abstandes zweier benachbarter Knoten in einer längeren Pfeife, wenn sie die nämliche stehende Schwingung ausführt. Eine gedackte Pfeife besitzt also dieselbe Grundschwingung wie eine beiderseits offene oder eine beiderseits geschlossene Pfeife von doppelter Länge, und bei den Oberschwingungen der gedackten Pfeife umfaßt die Pfeifenlänge immer ein ungerades Vielfaches des Abstandes zwischen Knoten und Bauch, woraus folgt, daß die Schwingungszahlen der Partialtöne sich verhalten wie die ungeraden ganzen Zahlen $1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$

§ 46. Auch im freien Luftraum werden ebene Wellen annähernd verwirklicht, wenn die Schallquelle einen verhältnismäßig kleinen Raum einnimmt und der Aufpunkt (I. § 35) hinreichend weit von der Schallquelle entfernt ist. Dann stellt die Entfernung x des Aufpunktes von der Schallquelle die Wellennormale dar, und für einen einfachen Ton mit der Schwingungszahl $\nu = \frac{1}{\tau}$ und der Wellenlänge λ haben wir, ebenso wie in (190), als partikuläre Lösung von (222):

$$\varphi = C \cos\left\{2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \vartheta\right\}, \tag{224}$$

wo zwischen ν, τ und λ die Beziehungen (189) gelten. Durch Addition mehrerer solcher partikulärer Lösungen erhalten wir eine allgemeinere Lösung, welche dem Falle entspricht, daß mehrere

Tonwellen aus der nämlichen Richtung gleichzeitig das Ohr treffen. Von besonderem Interesse ist hier der Fall, daß zwei Töne von gleicher Intensität und nur wenig verschiedenen Schwingungszahlen ν und ν' zusammenwirken. Dann haben wir für die Schwingung in einem Punkte, den wir der Einfachheit halber zum Koordinatenanfangspunkt $x = 0$ machen:

$$\varphi = C \cos (2\pi\nu t + \vartheta) + C \cos (2\pi\nu' t + \vartheta'),$$

oder:

$$(225)\quad \varphi = 2C \cos \left(2\pi \cdot \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right) \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{\nu' + \nu}{2} t + \frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right).$$

Denken wir uns nun $\nu' - \nu$ klein gegen ν, so ändert sich in (225) der erste cos nur langsam mit der Zeit, und es vergehen viele Schwingungen der Einzeltöne, ehe sein Wert merklich wechselt. Daher wirkt die Schwingung (225) auf das Ohr ebenso wie die einer einzigen Tonwelle von der veränderlichen Amplitude:

$$(226)\qquad C_t = 2C \cos \left(2\pi \cdot \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right)$$

und der Schwingungszahl $\frac{\nu' + \nu}{2}$, dem arithmetischen Mittel aus den Schwingungszahlen der Einzeltöne. Was man hört, ist also ein bestimmter Ton, dessen Intensität langsam und periodisch zwischen Null und einem Maximum hin und her schwankt. Diese Intensitätsschwankungen heißen die „Schwebungen“ der beiden zusammentreffenden Einzeltöne, ihre Maxima die „Stöße“ der Schwebungen. Die Häufigkeit der Schwebungen wird durch die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullwerten von C_t bestimmt, ihre Anzahl beträgt also $\nu' - \nu$ in der Zeiteinheit. Je näher die Einzeltöne einander liegen, desto langsamer und deutlicher unterscheidbar werden die Schwebungen, rücken die Töne auseinander, so häufen und verwischen sie sich; daher liefern die Schwebungen ein ausgezeichnetes Mittel, um die Abweichung nicht nur zweier einfacher nahezu gleicher Töne voneinander, sondern auch zweier nahezu in Konsonanz befindlicher musikalischer Töne von der vollkommenen Konsonanz mit dem Ohre zu prüfen. Denn auch bei zwei nahezu konsonanten musikalischen Tönen (Klängen) entstehen Schwebungen, zwar nicht der Grundtöne, wohl aber einzelner Paare der in den Klängen enthaltenen Partialtöne. So schwebt z. B. bei einer verstimmten Oktave der erste Oberton des tieferen Klanges mit dem Grundton des höheren Klanges, bei einer verstimmten Quinte der zweite Oberton des tieferen Klanges mit

dem ersten Oberton des höheren Klanges. Daher ist es auch verhältnismäßig sehr viel leichter, ein Instrument im natürlichen Tonsystem einzustimmen, als im temperierten Tonsystem.

Diese Schwebungen sind es nun auch nach Helmholtz, welche dem Gegensatz der Konsonanz und der Dissonanz die physikalische Grundlage geben. Denn es ist eine für alle Sinnesorgane zutreffende Tatsache, daß intermittierende Reize, bei gewisser Häufigkeit, aufdringlich, ermüdend, unangenehm wirken. Man denke z. B. an das Lesen bei flackernder Beleuchtung, oder an gewisse Formen der Lichtreklame. Ebenso leidet der Gehörnerv bei knarrenden, rasselnden, tremolierenden Klängen, falls die Häufigkeitszahl der Aufeinanderfolge eine gewisse Höhe erreicht. Wird diese merklich überschritten, so ist das Ohr nicht mehr imstande, die einzelnen Stöße zu unterscheiden, und das Unbehaglichkeitsgefühl erlischt; werden andrerseits die Schwebungen sehr langsam, so vermag das Ohr dem Auf- und Abschwellen der Klangstärke leichter zu folgen und empfindet den Augenblick, wo das Intervall zweier sich allmählich einander immer mehr annähernder Töne in den Einklang übergeht, und die Schwebungen immer seltener werden, bis sie sich schließlich ganz in die Unendlichkeit verlieren, als eine Erleichterung, ja manchmal direkt als eine Art Erlösung.

Wie mit dem Einklang zweier Töne, so ist es nun nach den vorigen Erörterungen auch mit dem Zusammentreffen der Obertöne zweier konsonanter Klänge, und das Unbehagen beim Anhören eines dissonanten, wie auch die Befriedigung beim Anhören eines konsonanten Intervalls, läßt sich daher ebenfalls mit dem Auftreten bzw. Verschwinden von störenden Schwebungen in Zusammenhang bringen. Nach dieser Auffassung erscheint die in der Konsonanz begründete Harmonie ihres mystischen Charakters entkleidet und die besondere Art der entsprechenden Gehörsempfindung auf physikalisch-physiologische Vorgänge zurückgeführt.

§ 47. Eine weitere verhältnismäßig einfache Lösung der Wellengleichung (222) ergibt sich, wenn wir annehmen, daß das Verschiebungspotential φ außer von der Zeit t nur von der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ des Aufpunktes (x, y, z) vom Koordinatenanfangspunkt abhängt. Dann wird nach I. (110):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$. Dadurch verwandelt sich $\Delta\varphi$ in:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) \tag{227}$$

und die Wellengleichung (222) läßt sich schreiben:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}, \tag{228}$$

sie besitzt also ganz die Form (155) und liefert daher als allgemeine Lösung nach (157):

$$r\varphi = f(r + at) + g(r - at). \tag{229}$$

Das sind zwei Kugelwellen, von denen die erste nach innen, die zweite nach außen mit der Geschwindigkeit a fortschreitet. Doch ist es hier nicht, wie bei ebenen Wellen, das Verschiebungspotential selber, was sich ungeändert fortpflanzt, sondern dessen Produkt mit r.

Betrachten wir zuerst als Beispiel eine nach außen fortschreitende Kugelwelle, setzen also $f = 0$. Dann wird:

$$\varphi = \frac{1}{r}\cdot g(r - at). \tag{230}$$

Damit die Wellenfunktion g endlich ist, muß φ für $r = 0$ unendlich groß werden; der Anfangspunkt ist also ein singulärer Punkt dieser Welle. Daher muß bei der Realisierung der Welle der Anfangspunkt aus dem Bereich der schwingenden Flüssigkeit (Luft) ausgeschlossen werden; in der Tat befindet sich ja dort die Schallquelle. Man denke sich z. B. als Schallquelle eine rings von Flüssigkeit umgebene Kugel aus irgendeiner festen elastischen Substanz, deren Volumen sich vermittelst eines inneren Mechanismus nach irgendeinem Gesetz abwechselnd vergrößert und verkleinert, — eine sogenannte „pulsierende" Kugel. Dieselbe überträgt ihre Schwingungen auf die unmittelbar angrenzende Flüssigkeit, und durch diese Grenzbedingung ist die Form der Wellenfunktion g bestimmt, da sich auch andrerseits aus dem Verschiebungspotential nach (218) und (230) die Größe der Verschiebung q an der Grenze ergibt. Die Verschiebung erfolgt in radialer Richtung, daher sind diese Kugelwellen longitudinal; die Größe der Verschiebung nimmt mit wachsender Entfernung von der Schallquelle ab.

Eine Verallgemeinerung der partikulären Lösung (230) der Wellengleichung (222) erhält man durch Addition mehrerer solcher Lösungen, also durch den Ausdruck des Verschiebungspotentials:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g_1 (r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g_2 (r_2 - at) + \cdots \qquad (231)$$

wo $r_1, r_2, \cdots$ die Entfernungen des Aufpunktes von gewissen festen Zentren, $g_1, g_2, \cdots$ irgendwelche Funktionen eines einzigen Arguments bedeuten. Diese Bewegung der Flüssigkeit wird erzeugt durch das Zusammenwirken verschiedener nach beliebigen Gesetzen in ihr pulsierender Kugeln, falls die Kugeln so weit voneinander entfernt sind, daß man von den Störungen absehen kann, welche die Grenzbedingungen an der Oberfläche einer Kugel durch die von den andern Kugeln ausgehenden Wellen erleiden. Nehmen wir speziell nur zwei Kugeln und setzen $g_1 = g_2 = g$, so ergibt sich:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g (r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g (r_2 - at). \qquad (232)$$

Dieser Fall läßt noch eine andere interessante Art von Realisierung zu. Denkt man sich nämlich die Symmetriebene der beiden Zentren $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$, d. h. diejenige Ebene, welche deren Verbindungslinie rechtwinklig halbiert, so erfolgt für jeden in dieser Symmetrieebene gelegenen Aufpunkt die Verschiebung $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ innerhalb der Ebene, da die Resultierende der beiden einander gleichen radialen Verschiebungen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ deren Winkel halbiert (Fig. 9). Macht man nun die Symmetrieebene zur festen Wand, so wird dadurch der Bewegungsvorgang in keiner Weise gestört, weil die an der festen Wand gültige Grenzbedingung, daß die Verschiebungskomponente in der Richtung ihrer Normalen verschwindet, ohnedies schon überall erfüllt ist. Die Bewegung wird also genau ebenso erfolgen, wenn man die feste Wand einführt und den einen Halbraum mit der Schallquelle 2 ganz fortläßt; oder mit anderen Worten: Eine feste ebene Wand, die einer Schallquelle gegenübergestellt wird, wirkt ebenso wie das Spiegelbild der Schallquelle in bezug auf die Wand.

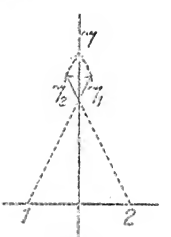

Fig. 9.

Betrachten wir nun auch eine Kugelwelle, die nach innen fortschreitet, wie sie durch die Funktion $f(r + at)$ in der Gleichung (229) dargestellt wird. Man mag sie sich realisiert denken durch

eine große mit Luft gefüllte dünnwandige Hohlkugel aus elastischem Material, die durch einen äußeren Mechanismus abwechselnd zusammengepreßt und ausgedehnt wird. Alle Einzelheiten des Vorgangs sind eindeutig bestimmt durch die Gleichung (229) in Verbindung mit den Anfangs- und Grenzbedingungen. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage: Was wird aus einer irgendwie gegebenen nach innen fortschreitenden Kugelwelle, wenn sie den Kugelmittelpunkt $r = 0$ erreicht? Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir einmal an, im Anfang, zur Zeit $t = 0$, bestehe nur eine nach innen fortschreitende Welle $f(r)$, von beliebig gegebener Form. Da der Kugelmittelpunkt der Flüssigkeit angehört, so gilt auch für ihn die Gleichung (229), und da in der Natur keine unendlich großen Verschiebungen auftreten, so ist auch für $r = 0$ das Verschiebungspotential endlich, und wir haben für alle Zeiten:

$$0 = f(at) + g(-at)$$

oder, wenn wir $at - r$ statt at schreiben;

$$0 = f(at - r) + g(r - at).$$

Dies in (229) eingesetzt ergibt:

$$r\varphi = f(at + r) - f(at - r). \tag{233}$$

Es findet also, ebenso wie wir das früher im § 37 an der Hand der Gleichungen (168) folgerten, im Kugelmittelpunkt eine Art Reflexion der Kugelwelle statt, indem die nach innen fortschreitende Welle sich in eine ihr entgegengesetzt gleiche nach außen fortschreitende Welle verwandelt, oder, wie man auch sagen kann: die Kugelwelle geht im Kugelmittelpunkt durch sich selber hindurch. Mit der Gleichung (233) steht unsere oben gemachte Festsetzung nicht in Widerspruch, daß im Anfang der Bewegung nur eine nach innen fortschreitende Welle vorhanden ist. Denn die Funktion $f(r)$, welche für $t = 0$ die Form der Welle darstellt, ist nur für positive Werte von r definiert, während in (233) auch negative Werte des Arguments $at - r$ in Betracht kommen. Wir haben also nur die Funktion f für alle negativen Werte des Arguments gleich Null anzunehmen, um für unseren Fall aus (233) den Verlauf der Bewegung eindeutig ableiten zu können. Dann ist nämlich in der Tat für $t = 0$:

$$r\varphi = f(r),$$

und ebenso verschwindet für alle Werte von $t < \frac{r}{a}$ die nach außen fortschreitende Welle, was darauf hinauskommt, daß der Aufpunkt r

von der reflektierten Welle erst dann getroffen wird, wenn sie den Weg vom Kugelmittelpunkt bis zu ihm hin mit der Geschwindigkeit a zurückgelegt hat.

§ 48. Die Theorie der Kugelwellen verschafft uns auch eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung (222) für eine allseitig unbegrenzte Flüssigkeit. Integrieren wir nämlich zunächst einmal diese Gleichung über einen beliebigen Flüssigkeitsraum mit dem Volumenelement $d\tau$, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Transformation (82):

$$\int \ddot{\varphi} \cdot d\tau = -a^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot d\sigma. \tag{234}$$

Wir wählen nun als Integrationsraum eine Kugel mit dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt und dem Radius r, und führen als Integrationsvariabeln die Polarkoordinaten ϱ, ϑ, ψ (I. (92)) ein. Dann wird nach I. (93):

$$d\tau = \varrho^2 d\varrho \cdot d\Omega, \tag{235}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\psi = d\Omega. \tag{236}$$

$d\Omega$ ist der „Öffnungswinkel" des durch die Differentiale $d\vartheta$ und $d\psi$ bestimmten Kegels, gemessen durch die Größe des Flächenstücks, welches dieser Kegel aus der um den Anfangspunkt mit dem Radius $\varrho = 1$ beschriebenen Kugelfläche, der „Einheitskugel", ausschneidet.

Ferner wird:

$$d\sigma = r^2 \cdot d\Omega, \qquad \nu = -\varrho. \tag{237}$$

Folglich:

$$\int\int \ddot{\varphi}\, \varrho^2 d\varrho\, d\Omega = a^2 r^2 \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_r d\Omega. \tag{238}$$

Die Integration über Ω ist auf beiden Seiten der Gleichung von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ zu erstrecken, außerdem links über ϱ von 0 bis r. Der Index r auf der rechten Seite soll bedeuten, daß nach Ausführung der Differentiation $\varrho = r$ zu setzen ist.

Wir wollen nun den Mittelwert des Verschiebungspotentials φ für eine bestimmte Entfernung ϱ vom Anfangspunkt einführen, das ist der Quotient aus der Summe der Werte von φ in allen Flächenelementen der Kugel mit dem Radius ϱ, ein jeder mit der Größe

des Flächenelements multipliziert, dividiert durch die Summe aller Flächenelemente, d. h. durch die Größe der ganzen Kugelfläche:

$$\frac{1}{4\pi\varrho^2}\int \varphi\,\varrho^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int \varphi\, d\Omega = \overline{\varphi}. \tag{239}$$

Dann schreibt sich die vorige Gleichung:

$$\int_0^r \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2}\,\varrho^2 d\varrho = a^2 r^2 \left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varrho}\right)_r.$$

Differentiieren wir sie nach r, so folgt:

$$r^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial r}\right) = a^2\left(2r\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial r^2}\right),$$

wo nun in $\overline{\varphi}$ statt ϱ r eingesetzt zu denken ist. Diese Gleichung aber ist identisch mit der Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2(r\overline{\varphi})}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\overline{\varphi})}{\partial r^2} \tag{240}$$

und liefert uns den Satz, daß bei jedem beliebigen Schwingungsvorgang einer Flüssigkeit für die Mittelwerte des Verschiebungspotentials, bezogen auf die Kugelflächen um irgendeinen zum Anfangspunkt gewählten Flüssigkeitspunkt, die Gesetze der Kugelwellen gelten. Für Kugelwellen wird speziell $\overline{\varphi} = \varphi$, also (240) identisch mit (228).

Eine interessante Folgerung aus (240) fließt aus ihrer Anwendung auf den Grenzfall einer inkompressibeln Flüssigkeit, für welche nach (215) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $a = \infty$ wird. Dann geht nämlich die Wellengleichung (222) über in $\Delta\varphi = 0$, also die Laplacesche Gleichung I. (129), und die Gleichung (240) in $\frac{\partial^2(r\overline{\varphi})}{\partial r^2} = 0$, deren allgemeine Lösung ist:

$$r\overline{\varphi} = A + Br$$

oder:

$$\overline{\varphi} = \frac{A}{r} + B. \tag{241}$$

Da nun für $r = 0$ $\overline{\varphi}$ endlich ist, so folgt $A = 0$ und

$$\overline{\varphi} = B, \tag{242}$$

d. h. eine Funktion φ, welche der Laplaceschen Gleichung genügt, also z. B. die Potentialfunktion gravitierender Massen außerhalb dieser Massen, besitzt die Eigenschaft, daß ihre Mittelwerte auf einer Schar konzentrischer Kugelflächen alle einander gleich sind, also auch gleich dem Wert im Mittelpunkt. Daraus folgt auch, daß die Funktion in keinem Raumpunkt ein absolutes Maximum

oder ein absolutes Minimum besitzen kann, und nach I. § 41, daß außerhalb eines Systems gravitierender Massen niemals eine Stelle absolut stabilen oder absolut labilen Gleichgewichts existieren kann.

§ 49. Das durch die Gleichung (240) ausgesprochene Gesetz können wir nun benutzen, um für eine hinreichend weit ausgedehnte Flüssigkeitsmasse bei gegebenem Anfangszustand das Verschiebungspotential in irgendeinem zum Koordinatenanfangspunkt gewählten Flüssigkeitspunkt für beliebige Zeiten zu bestimmen. Zunächst folgt nämlich aus (240) als allgemeines Integral:

$$r\overline{\varphi} = f(r + at) + g(r - at),$$

oder, da $\overline{\varphi}$ für $r = 0$ endlich bleibt, ganz wie in (233) für Kugelwellen:

$$r\overline{\varphi} = f(at + r) - f(at - r). \tag{243}$$

Die Form der Funktion f ergibt sich eindeutig aus den Bedingungen des Anfangszustandes. Zur Charakterisierung desselben können wir annehmen, daß für $t = 0$ sowohl das Verschiebungspotential φ als auch dessen Differentialquotient nach der Zeit $\dot{\varphi}$ als Funktion des Ortes gegeben ist. Denn φ ist, bis auf eine belanglose additive Konstante, durch die Verschiebungen q nach (218), und $\dot{\varphi}$ ist durch die Geschwindigkeit $\dot{q}$ nach (219) bestimmt. Wir schreiben also:

$$\varphi_0 = F(r, \vartheta, \psi) \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}_0 = \Phi(r, \vartheta, \psi) \tag{244}$$

und nehmen F und Φ als gegeben an. Dann sind auch

$$\overline{\varphi}_0 = \overline{F}(r) \quad \text{und} \quad \overline{\dot{\varphi}}_0 = \overline{\Phi}(r) \tag{245}$$

als gegebene Funktionen von r zu betrachten. Andererseits folgt aus (243) durch Differentiation nach t:

$$r\overline{\dot{\varphi}} = a f'(at + r) - a f'(at - r), \tag{246}$$

also für $t = 0$ aus (243), (246) und (245):

$$r\overline{F} = f(r) - f(-r), \tag{247}$$

$$r\overline{\Phi} = a f'(r) - a f'(-r). \tag{248}$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Integration:

$$\frac{1}{a}\int r\,\overline{\Phi}\,dr = f(r) + f(-r),$$

und daraus in Verbindung mit (247):

$$f(\pm r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}\int r\,\overline{\Phi}\,dr \pm r\overline{F}\right\}. \tag{249}$$

Hierdurch ist die Funktion f für alle positive und negative Werte ihres Arguments bestimmt und damit nach (243) $\overline{\varphi}$ als Funktion von r und t direkt angebbar. Die additive Konstante in dem Integral ist ganz willkürlich wählbar und ohne Einfluß auf den Wert von $\overline{\varphi}$.

Aus dem Ausdruck von $\overline{\varphi}$ für ein beliebiges r und ein beliebiges t läßt sich sogleich auch der Wert $\varphi_t(0)$ für $r = 0$ ableiten, da nach (243):

$$\varphi_t(0) = \overline{\varphi}(0) = \lim_{r=0} \frac{f(at+r) - f(at-r)}{r} = 2f'(at);$$

und da nach (249):

$$\pm f'(\pm r) = \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\overline{\Phi}(r) \pm \frac{d(r\overline{F}(r))}{dr}\right\},$$

so folgt für alle positiven Zeiten t:

$$\varphi_t(0) = t\,\overline{\Phi}(at) + \frac{d(t\,\overline{F}(at))}{dt}. \tag{250}$$

Diese Gleichung liefert das Verschiebungspotential φ in irgendeinem Punkt der Flüssigkeit zu irgendeiner Zeit t, ausgedrückt durch die Werte (244) von φ und $\dot{\varphi}$ für $t = 0$ auf einer um den Punkt mit dem Radius at beschriebenen Kugelfläche. Daraus folgt u. a., daß der physikalische Zustand in irgendeinem Punkt zu irgendeiner Zeit t nur abhängig ist von dem physikalischen Zustand zur Zeit $t = 0$ in der Entfernung at von dem Punkt. Wenn z. B. die Schwingungen verursacht werden durch eine Gleichgewichtsstörung, die sich anfänglich auf einen begrenzten Bezirk der Flüssigkeit, den „Störungsherd", beschränkt, so wird ein außerhalb des Störungsherdes befindlicher Punkt erst nach Ablauf derjenigen Zeit von der Störungswelle ergriffen, welche zum Zurücklegen der Strecke bis zum nächsten Punkt des Störungsherdes mit der Geschwindigkeit a erforderlich ist, und andererseits erlischt die Bewegung vollkommen nach Ablauf derjenigen Zeit, welche zum Zurücklegen der Strecke bis zum entferntesten Punkt des Störungsherdes mit der Geschwindigkeit a gehört, und dasselbe gilt für einen innerhalb des Störungsherdes gelegenen Punkt. Demnach verbreitet sich die anfängliche Störung von ihrem Herd nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit a, und im Innern bildet sich ein stetig wachsender Bezirk der Ruhe aus, beginnend in demjenigen Punkte, für welchen der Abstand von dem entferntesten Punkte des Störungsherdes am kleinsten ist.

Wie für das Verschiebungspotential, so gilt die Gleichung (250) ohne weiteres auch für jede einzelne Komponente der Verschiebung oder der Geschwindigkeit, ebenso auch für die Volumendilatation und für den Druck, wie überhaupt für jede Größe, welche die Wellengleichung (222) befriedigt.

§ 50. Untersuchen wir zum Schluß noch den Einfluß, welchen eine Bewegung, sei es der Schallquelle oder des Beobachters, auf die Höhe des gehörten Tones besitzt. Daß ein derartiger Einfluß vorhanden ist, folgt daraus, daß die Tonhöhe bedingt ist durch die Anzahl der in der Zeiteinheit das Ohr treffenden Wellen, und daß diese Anzahl mit davon abhängt, ob die Entfernung des Beobachters von der Schallquelle unveränderlich ist oder nicht. Doch wäre es unrichtig anzunehmen, daß es bei der Tonhöhe nur auf die relative Bewegung von Schallquelle und Beobachter ankäme. Denn setzen wir einmal den Fall, die Schallquelle ruhe und der Beobachter bewege sich mit der Schallgeschwindigkeit a von ihr fort, so hört er überhaupt nichts, weil die Schallwellen ihn gar nicht erreichen, während er dagegen sehr wohl von Schallwellen getroffen wird, wenn er selber ruht und die Schallquelle sich mit beliebig großer Geschwindigkeit von ihm entfernt. Der Grund dieses Unterschiedes ist — nicht, daß es dabei auf die absolute Bewegung ankommt; denn eine „absolute" Bewegung ist sinnlos, sondern — daß bei der Fortpflanzung des Schalles auch das Medium, welches die Fortpflanzung vermittelt, also etwa die Luft, eine wesentliche Rolle spielt, und daß daher die Bewegungen relativ zur Luft berücksichtigt werden müssen. Die Sätze, welche hier in Kraft treten, werden gewöhnlich unter dem Namen des „Dopplerschen Prinzips" zusammengefaßt, obwohl wir es hier offenbar nicht mit einem besonderen Prinzip, sondern einfach mit elementaren Sätzen der Kinematik zu tun haben.

Wir nehmen an, eine Schallquelle Q, welche in der Zeiteinheit ν_0 Schwingungen aussendet, und ein Beobachter B bewegen sich

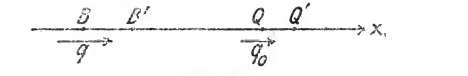

Fig. 10.

beide auf der x-Achse, erstere mit der Geschwindigkeit q_0, letzterer mit der Geschwindigkeit q, relativ zur Luft, die wir uns

ruhend denken. Die Schallquelle befindet sich auf der positiven Seite (rechts) von B; dann erfolgt, falls $q > q_0$, eine Annäherung des Beobachters an die Schallquelle (Fig. 10). Welches ist nun die Schwingungszahl ν des vom Beobachter gehörten Tones?

Betrachten wir zuerst den speziellen Fall, daß die Quelle Q ruht und der Beobachter B sich ihr mit der Geschwindigkeit q nähert. Dann legt er in der Zeiteinheit die Strecke $BB' = q$ zurück. Wäre er in B geblieben, so hätten ihn in dieser Zeit ν_0 Wellen getroffen. Da er aber den Wellen entgegengeeilt ist, so haben ihn außer diesen ν_0 Wellen auch alle diejenigen Wellen getroffen, welche auf der Strecke BB' Platz haben, das sind $\frac{q}{\lambda_0}$ und nach (189) $\frac{q\nu_0}{a}$ Wellen. Folglich ist die Schwingungszahl des gehörten Tones:

$$\nu_0\left(1 + \frac{q}{a}\right) = \frac{a+q}{\lambda_0}. \tag{251}$$

Nun setzen wir allgemeiner voraus, daß auch die Schallquelle Q sich bewegt, und zwar mit der Geschwindigkeit q_0 nach rechts. Dann befindet sich nach Ablauf der Zeiteinheit die Quelle im Punkte Q', wobei $QQ' = q_0$. Von den Schallwellen, welche während dieser Zeit in der Richtung nach B hin von der Quelle ausgegangen sind, ist die erste inzwischen bis zur Entfernung a von Q vorgedrungen, die letzte befindet sich bei Q', und diese ganze Strecke $a + q_0$ wird gleichmäßig von den Wellen erfüllt. Da es im ganzen ν_0 Wellen sind, so beträgt die Wellenlänge $\frac{a+q_0}{\nu_0} = \lambda$, und diese Wellenlänge λ in (251) statt λ_0 eingesetzt ergibt die Schwingungszahl des gehörten Tones:

$$\nu = \frac{a+q}{a+q_0} \cdot \nu_0. \tag{252}$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck des Dopplerschen Prinzips. Wenn also z. B. der Beobachter und die Schallquelle sich gleichschnell bewegen, so daß ihre Entfernung konstant bleibt, so ist $\nu = \nu_0$, und die Bewegung ganz ohne Einfluß auf die Tonhöhe. Wenn aber der Beobachter und die Quelle ihren Abstand ändern, so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob der Beobachter oder ob die Quelle ruht. Entfernt sich der Beobachter von der ruhenden Quelle mit Schallgeschwindigkeit, so ist $q = -a$ und $q_0 = 0$, also: $\nu = 0$; entfernt sich aber die Quelle vom ruhenden

Beobachter mit Schallgeschwindigkeit, so ist $q_0 = a$, $q = 0$, also: $\nu = \frac{\nu_0}{2}$, ganz im Sinne der früheren Überlegung.

Nur wenn q und q_0 klein sind gegen a, hat man in erster Annäherung:

$$\nu = \left(1 + \frac{q - q_0}{a}\right) \nu_0 . \tag{253}$$

Dann spielt also nur die Differenz der Geschwindigkeiten, d. h. die relative Bewegung des Beobachters und der Schallquelle gegeneinander, eine Rolle.

Dritter Teil.

Endliche Deformationen.

Erstes Kapitel. Allgemeines.

§ 51. Indem wir von dem spezielleren Fall der Bewegungen mit unendlich kleinen Deformationen zu dem allgemeineren der Bewegungen mit endlichen Deformationen zurückkehren, knüpfen wir zunächst wieder an die Betrachtung einer beliebigen endlichen Bewegung eines stetig ausgedehnten materiellen Körpers in § 2 an und benutzen zur Darstellung derselben auch wieder die Gleichungen (1) und (1a), aus denen der Ort (x, y, z) zu berechnen ist, an welchem sich der materielle Punkt (a, b, c) zur Zeit t befindet.

Umgekehrt erhält man aus (1) durch Auflösung nach a, b, c Gleichungen von der Form:

$$(254)\quad \left\{\begin{aligned} a &= f'(x, y, z, t),\\ b &= \varphi'(x, y, z, t),\\ c &= \psi'(x, y, z, t), \end{aligned}\right.$$

welche die Antwort geben auf die Frage, welcher materielle Punkt (a, b, c) sich zur Zeit t im Orte (x, y, z) befindet.

Der Gegenüberstellung der Gleichungen (1) und (254) entspricht die Gegenüberstellung zweier Betrachtungsweisen, welche die ganze Hydrodynamik durchziehen und in ihr einen durchgehenden Dualismus schaffen: der „substanziellen“ und der „lokalen“ Betrachtung. Bei der ersteren faßt man einen bestimmten materiellen Punkt (a, b, c) oder ein bestimmtes materielles System ins Auge und fragt nach dessen Veränderungen im Raume; bei der zweiten faßt man einen bestimmten Raumpunkt (x, y, z) oder einen bestimmten Raumteil ins Auge und fragt nach den materiellen Punkten, welche diesen Raumpunkt passieren oder in diesen Raumteil eintreten. Der substanziellen Betrachtung entspricht die Wahl von a, b, c, t, der lokalen die von x, y, z, t als unabhängige

Variable. Um diesen Unterschied auch in der Bezeichnung möglichst deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir im folgenden durchweg die auf die unabhängigen a, b, c, t bezüglichen Differentiale mit geradem d, die auf die unabhängigen x, y, z, t bezüglichen Differentiale dagegen mit rundem ∂ bezeichnen. Dann ist z. B. $\frac{dx}{dt} = u$ die x-Komponente der Geschwindigkeit des materiellen Punktes (a, b, c), während $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ist. Ferner ist $\frac{du}{dt}$ die x-Komponente der Beschleunigung, während dagegen $\frac{\partial u}{\partial t}$ sich auf den Unterschied der Geschwindigkeiten derjenigen beiden materiellen Punkte bezieht, welche zur Zeit t und zur Zeit $t + \partial t$ sich im Ort (x, y, z) befinden. So ist beim stationären (§ 62) Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäß überall $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, während dagegen die Beschleunigung $\frac{du}{dt} \neq 0$ sein wird. Allgemein besteht zwischen diesen beiden Größen die Beziehung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w. \qquad (255)$$

§ 52. Was nun die rein kinematische Seite der zu betrachtenden Bewegungen betrifft, so versteht es sich, daß hier alle im ersten Kapitel dieses Buches abgeleiteten Gesetze Gültigkeit besitzen. Wir werden von ihnen insbesondere diejenigen benutzen, welche sich auf eine beliebige unendlich kleine Veränderung beziehen und deren Formulierung in § 12 gegeben ist. Denn eine jede Bewegung läßt sich zurückführen auf eine unendlich kleine Veränderung, wofern man sie nur während einer unendlich kleinen Zeit, von t bis $t + \tau$, betrachtet. Dann gelten hierfür alle Formeln des § 12, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt die Koordinaten eines materiellen Punktes vor der Veränderung nicht mehr a, b, c, sondern x, y, z heißen, und daß die Komponenten der unendlich kleinen Verschiebung nicht mehr u, v, w, sondern $u\tau, v\tau, w\tau$ sind, wo u, v, w die endlichen Geschwindigkeitskomponenten bedeuten. Demnach werden auch die neun unendlich kleinen Koeffizienten λ, μ, ν in (57), welche die Rotation und die Deformation eines Massenteilchens charakterisieren, dem Zeitelement τ proportional.

Um nun weiterhin mit endlichen Werten rechnen zu können, dividieren wir alle diese unendlich kleinen Größen mit τ, d. h. wir führen statt der unendlich kleinen Komponenten der Translation,

der Rotation und der Deformation die endlichen Komponenten der Translationsgeschwindigkeit, der Rotationsgeschwindigkeit und der Deformationsgeschwindigkeit ein, und wählen für ihre Bezeichnung auch wieder die nämlichen Buchstaben wie in § 12. Daher bedeuten von jetzt an

(256) $$u,\ v,\ w;\ \xi,\ \eta,\ \zeta;\ x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y$$

die entsprechenden endlichen Geschwindigkeitskomponenten; zwischen ihnen und den Koordinaten x, y, z bestehen auch der Form nach genau wieder die früheren Beziehungen (59), (60), (61) usw.

Durch die Volumendilatationsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{q}$$

eines Massenteilchens ist auch dessen Dichtigkeitsänderung bestimmt. Denn wir haben ganz wie in (213a) für die in der unendlich kleinen Zeit dt eintretende Veränderung eines Massenteilchens vom anfänglichen Volumen dV:

$$dV \cdot k = dV\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt\right) \cdot \left(k + \frac{dk}{dt} dt\right)$$

und daraus:

(257) $$k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{dk}{dt} = 0,$$

oder mit Rücksicht darauf, daß:

(258) $$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial x} u + \frac{\partial k}{\partial y} v + \frac{\partial k}{\partial z} w + \frac{\partial k}{\partial t},$$

(259) $$\frac{\partial (ku)}{\partial x} + \frac{\partial (kv)}{\partial y} + \frac{\partial (kw)}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0.$$

Es ist von Interesse, diese Identität, welche oft als „Kontinuitätsgleichung" bezeichnet wird, statt durch eine substanzielle, durch eine lokale Betrachtung abzuleiten. Fassen wir irgendeinen bestimmten irgendwie begrenzten endlichen Raum ins Auge, so ist zur Zeit t die gesamte darin enthaltene Masse $\int k\, d\tau$, und ihre Änderung in der Zeit $d\tau$:

$$dt \int \frac{\partial k}{\partial t} \cdot d\tau.$$

Diese Änderung ist andererseits gleich der algebraischen Summe der Massen aller derjenigen Körperteilchen, welche während der Zeit dt durch die Oberfläche in den Raum eintreten.

Nun tritt durch das Oberflächenelement $d\sigma$ mit der inneren Normalen ν in der Zeit dt folgende Masse ein:

$$d\sigma \cdot k \cdot \left(u\cos(\nu x) + v\cos(\nu y) + w\cos(\nu z)\right) \cdot dt, \qquad (260)$$

das ist die Masse eines (schiefen) Zylinders von der Dichtigkeit k, der Grundfläche $d\sigma$ und der Seitenlänge $\mathfrak{q} \cdot dt$. Folglich haben wir die Gleichung:

$$\int \frac{\partial k}{\partial t} \cdot d\tau = \int d\sigma\, k \left(u\cos(\nu x) + v\cos(\nu y) + w\cos(\nu z)\right)$$

oder nach (78):

$$\int \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (ku)}{\partial x} + \frac{\partial (kv)}{\partial y} + \frac{\partial (kw)}{\partial x}\right) d\tau = 0.$$

Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit auch, wenn man den Raum auf ein einzelnes Raumelement $d\tau$ zusammenschrumpfen läßt, woraus sich dann (259) ergibt.

Statt auf ein unendlich kleines Zeitteilchen dt kann man die Kontinuitätsgleichung auch auf eine endliche Zeit t beziehen, indem man die Masse eines Körperelements zur Zeit t gleich setzt der Masse des nämlichen Körperelements zur Zeit 0, mit Benutzung des Ausdrucks (51) der Funktionaldeterminante für die Volumenveränderung. Dann ist:

$$dV_0 \cdot k_0 = dV_0 \cdot D \cdot k,$$

wobei der Index 0 bedeutet, daß $t = 0$ zu setzen ist. Folglich:

$$D \cdot k = k_0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(Dk)}{dt} = 0. \qquad (261)$$

Wir werden im folgenden je nach Bedarf die eine oder die andere Form der Kontinuitätsgleichung benutzen.

§ 53. Es handelt sich jetzt um die Aufstellung der dynamischen Bewegungsgesetze. Wenn wir auch bei beliebigen endlichen Deformationen an der im § 21 eingeführten Hypothese der „vollkommenen Elastizität" festhalten wollen, daß der Druck allein abhängt von der augenblicklichen Deformation, so sind wir genötigt, uns bei den folgenden Betrachtungen auf Flüssigkeiten und Gase zu beschränken; denn bei einem festen Körper würde bei stetig anwachsender Deformation früher oder später die Elastizitätsgrenze überschritten werden. Daher bildet dieser dritte Teil des Buches das eigentliche Gebiet der Hydrodynamik (einschließlich Aërodynamik).

Wir setzen also wieder wie in § 44:

(261a) $Y_z = Z_x = X_y = 0$ und $X_x = Y_y = Z_z = p = f(k)$

und erhalten dann aus (83) die hydrodynamischen Grundgleichungen:

(262) $$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)k - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \cdots.$$

Dieselben lassen sich noch einfacher schreiben, wenn wir annehmen, daß die Massenkraft ein Potential hat, also:

(263) $$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

und wenn wir außerdem die Funktion des Druckes oder der Dichtigkeit einführen:

(264) $$P = \int \frac{dp}{k},$$

definiert bis auf eine unbestimmt bleibende additive Konstante.

Dann schreiben sich nämlich die Gleichungen (262) folgendermaßen:

(265) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \cdots$$

oder in Vektorform:

(266) $$\dot{\mathfrak{q}} + \operatorname{grad}(V + P) = 0.$$

Indessen sind diese Gleichungen nicht so einfach wie sie aussehen. Denn in ihnen kommen die Koordinaten x, y, z einmal (in der Beschleunigung) als abhängige, einmal (im Potential- und Druckgefälle) als unabhängige Variable vor, und wenn man mit ihnen rechnen will, ist es in der Regel notwendig, eine einheitliche Betrachtungsweise durchzuführen, d. h. sich entweder durchgehends der substanziellen oder durchgehends der lokalen Betrachtung zu bedienen. Je nachdem man das eine oder das andere tut, erhält man verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen, die aber beide komplizierter gebaut sind als (265) oder (266).

Um zunächst die substanzielle Betrachtung durchzuführen, multiplizieren wir die drei Gleichungen (265) der Reihe nach mit $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$ und erhalten dann:

(267) $$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da} + \frac{dV}{da} + \frac{dP}{da} = 0,$$

und analog die beiden Gleichungen für b und c.

Dies sind die sogenannten Lagrangeschen Gleichungen. Zu ihnen tritt als Ergänzung die Kontinuitätsgleichung in der substanziellen Form (261).

Andererseits erhalten wir für die lokale Betrachtung aus (265) mit Benutzung von (255):

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{268}$$

und die beiden entsprechenden Gleichungen für y mit v und für z mit w.

Diese Gleichungen tragen den Namen von Euler. Zu ihnen gehört die lokale Formulierung (259) der Kontinuitätsgleichung.

Wie man sieht, sind die Bewegungsgleichungen durch jede dieser Umformungen nicht nur äußerlich länger geworden, sondern sie haben auch, was die Hauptsache ist, ihren linearen Charakter verloren, und dieser Umstand verleiht den hydrodynamischen Problemen ihre eigentümlichen mathematischen Schwierigkeiten.

§ 54. Der erste Gebrauch, den wir von den Gleichungen der Hydrodynamik machen wollen, ist die Anwendung und Verifizierung des Prinzips der Erhaltung der Energie. Wir verfahren dabei genau nach der in § 23 bei unendlich kleinen Deformationen befolgten Methode, indem wir von der Energiegleichung (89) ausgehen, und für die darin vorkommenden Größen: die kinetische Energie L, die potentielle Energie U, die äußere Arbeit A, der Reihe nach ihre Werte einsetzen, nach dem Muster der Gleichungen (90), (91) und (92). Nur ist jetzt zu beachten, daß die Komponenten der in der Zeit dt erfolgenden Verschiebung eines materiellen Punktes hier nicht durch du, dv, dw, sondern durch $u \cdot dt$, $v \cdot dt$, $w \cdot dt$ dargestellt werden. Ferner ist es hier, wo die Dichtigkeit k in endlicher Weise veränderlich ist, bequem, die potentielle Energie nicht auf Volumenelemente, sondern auf Massenelemente zu beziehen. Somit erhalten wir aus (90):

$$L = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, k\, d\tau, \tag{269}$$

aus (91):

$$U = \int F \cdot k\, d\tau, \tag{270}$$

wo F die nur von k (oder p) abhängige potentielle Energie der Masseneinheit bedeutet, und aus (92):

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw)\, k\, d\tau + dt \cdot \int (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w)\, d\sigma, \tag{271}$$

wobei nach (74):

$$X_\nu = p\cos(\nu x), \quad Y_\nu = p\cos(\nu y), \quad Z_\nu = p\cos(\nu z). \tag{272}$$

Indem wir nun die zeitlichen Differentiale dL und dU bilden, beachten wir, daß das Produkt $k\,d\tau$, die Masse eines Körperelements, unabhängig ist von der Zeit, und erhalten somit aus (269):

$$dL = dt \cdot \int \left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) k\, d\tau,$$

und aus (270):

$$dU = dt \cdot \int \frac{dF}{dt} \cdot k\, d\tau,$$

ferner aus (271) und (272), mit Benutzung der Umformung (78):

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw)\, k\, d\tau - dt \cdot \int \left(\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}\right) d\tau. \tag{272a}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Energiegleichung (89) einsetzen und dabei die Werte der Beschleunigungskomponenten nach (262) berücksichtigen, so heben sich eine Reihe von Gliedern auf den beiden Seiten der Gleichung fort, und es bleibt allein die Beziehung zurück:

$$\int \frac{dF}{dt} k\, d\tau = -\int p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau,$$

oder, da diese Gleichung auch für ein einzelnes Volumenelement $d\tau$ gilt, mit Berücksichtigung von (257):

$$dF = \frac{p}{k^2}\, dk. \tag{273}$$

Die Forderungen des Energieprinzips sind also immer und nur dann erfüllt, wenn als potentielle Energie der Masseneinheit angenommen wird:

$$F = \int \frac{p}{k^2}\, dk = -\int p \cdot d\left(\frac{1}{k}\right), \tag{274}$$

wo $\frac{1}{k}$ das Volumen der Masseneinheit (spezifisches Volumen) be-

deutet. Statt dessen kann man auch, mittels partieller Integration und Einführung der Funktion P aus (264), schreiben:

$$F = -\frac{p}{k} + \int \frac{dp}{k} = -\frac{p}{k} + P. \tag{275}$$

Wenn die potentielle Energie als Funktion der Dichte oder des spezifischen Volumens bekannt ist, so läßt sich hieraus unmittelbar die Abhängigkeit des Druckes p von der Dichte berechnen. Denn aus (274) folgt, wenn wir für einen Augenblick das spezifische Volumen mit v bezeichnen:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p. \tag{276}$$

Diese Beziehung steht in augenfälliger Analogie mit den Relationen (97) zwischen dem elastischen Potential und den elastischen Druckkomponenten, welche insofern allgemeiner sind, als sie auch scherende Druckkräfte mit umfassen, aber insofern spezieller, als sie sich nur auf unendlich kleine Deformationen beziehen.

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist speziell $k = \text{const.}$, also nach (264):

$$P = \frac{p}{k} \tag{277}$$

und nach (275):

$$F = 0,$$

d. h. eine inkompressible Flüssigkeit besitzt keine potentielle Energie. Dieser Befund ist im Einklang mit der Überlegung, daß die Inkompressibilität einer Flüssigkeit sich, ebenso wie die Unausdehnbarkeit eines Fadens (I. § 107), auffassen läßt als eine vorgeschriebene Bedingung zwischen den Koordinaten der Körperteilchen (Volumendilatation gleich Null), ganz ohne Rücksicht auf die Größe der Druckkräfte, und daß die dadurch bedingten Zwangskräfte niemals Arbeit leisten (I. (314)). —

Wir notieren uns noch, für späteren Gebrauch, aus (271), (272) und (272a) den speziellen Ausdruck für die Arbeit eines in allen Punkten der Oberfläche gleichmäßig wirkenden äußeren Druckes, bei einer beliebigen Veränderung:

$$A = dt\, p \int \left(u \cos(\nu x) + v \cos(\nu y) + w \cos(\nu z)\right) d\sigma$$
$$= -dt\, p \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau,$$

oder, da $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$ die in der Zeit dt erfolgende Dilatation des Volumenelements $d\tau$ bedeutet:

$$A = -p \cdot dV, \tag{278}$$

wenn hier dV die Volumenänderung der ganzen Flüssigkeitsmasse bezeichnet.

§ 55. Zu speziellen Anwendungen der hydrodynamischen Gesetze übergehend fragen wir zunächst nach den Bedingungen des Gleichgewichts. Hierfür folgt aus (265) durch Integration:

$$V + \int \frac{dp}{k} = \text{const.} \tag{279}$$

Im Gleichgewicht sind also die Niveauflächen $V = \text{const.}$ der Massenkräfte (I. § 40) zugleich Flächen konstanten Druckes und konstanter Dichte. Wenn zwei verschiedene Flüssigkeiten aneinander grenzen, so wird an der Trennungsfläche die Dichte k im allgemeinen einen Sprung erleiden, dagegen der Druck p bleibt, nach dem Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung, unter allen Umständen stetig. Wenn also auf eine Flüssigkeitsoberfläche ein gleichmäßiger äußerer Druck wirkt, so ist auch der Flüssigkeitsdruck an der Grenze konstant, und die Oberfläche ist eine Fläche konstanten Potentials der Massenkräfte. Dies gilt insbesondere auch für den speziellen Fall, daß der äußere Druck gleich Null oder gleich dem der atmosphärischen Luft ist und die Flüssigkeit, wie man sagt, eine „freie" Oberfläche besitzt, — ein Satz, der den Niveauflächen ihren Namen gegeben hat.

Wenn durch die Bedingungen an der Oberfläche der Wert der Integrationskonstanten in (279) bestimmt ist, so ist danach die Größe des Druckes im ganzen Innern gegeben, ganz unabhängig von der Art der übrigen Begrenzung der Flüssigkeitsmenge, also auch von der Größe und Form des Gefäßes, in dem sie sich befindet. Wenn z. B. als einzige Massenkraft das Gewicht der Flüssigkeit wirkt, in der Richtung der negativen z-Achse, so ist nach (67):

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Zkd\tau = -gkd\tau,$$

und nach (263):

$$V = gz + \text{const.}, \tag{280}$$

wodurch (279) übergeht in:

$$\int \frac{dp}{k} + gz = \text{const.} \tag{281}$$

und für eine inkompressible Flüssigkeit:

$$p = \text{const.} - kgz. \tag{282}$$

Daher ist der Druck in allen Punkten gleicher Höhe der nämliche, und wächst mit abnehmender Höhe proportional der Höhendifferenz. In der Gleichung (282) sind die Gesetze der kommunizierenden Röhren, der Heberwirkungen, der Flüssigkeitsbarometer und -manometer enthalten.

Beim Quecksilberbarometer z. B. ist, wenn $z = 0$ die Ebene der offenen, dem Luftdruck p_0 ausgesetzten Oberfläche, $z = h$ die Höhe der ans Vakuum grenzenden Flüssigkeitssäule bezeichnet,

$$\begin{aligned} &\text{für } z = 0 \quad p = p_0 \\ &\text{für } z = h \quad p = 0, \end{aligned}$$

also nach (282):

$$p_0 = kgh. \tag{283}$$

Als „Druck einer Atmosphäre" definiert man den Wert von p_0 für

$$k = 13{,}596\ [g\,\text{cm}^{-3}],\ g = 980{,}6\ [\text{cm}\,\text{sec}^{-2}],\ h = 76\ [\text{cm}],$$

also:

$$p_0 = 1013250\ [\text{g cm}^{-1}\,\text{sec}^{-2}]. \tag{284}$$

Statt in Atmosphären mißt man Druckgrößen häufig auch durch den nach (283) entsprechenden Wert von h („Millimeter Quecksilber"), indem man den absolut gemessenen Druck p durch kg dividiert.

§ 56. Wenden wir nun die Gleichgewichtsbedingung (281) auch auf kompressible Flüssigkeiten an, z. B. auf eine Luftsäule von beliebiger Höhe. Dann ist die Kenntnis der Funktion $f(k)$ in (211) erforderlich. Falls die Temperatur der Luft als gleichmäßig, etwa 0° C, angenommen werden darf, können wir setzen:

$$p = ck, \tag{285}$$

wobei c dadurch bestimmt ist, daß für den Druck p_0 einer Atmosphäre $k = k_0 = 0{,}001293$, d. h.

$$c = \frac{p_0}{k_0}. \tag{286}$$

Damit erhalten wir aus (281) durch Ausführung der Integration, mit $z = 0$ für $p = p_0$:

$$z = \frac{p_0}{gk_0} \cdot \ln \frac{p_0}{p}. \tag{287}$$

Das ist die sogenannte barometrische Höhenformel für isothermes Gleichgewicht, durch welche man aus dem Luftdruck p die ent-

sprechende Höhe z findet. Mit Benutzung der angegebenen Zahlenwerte und Einführung dekadischer Logarithmen lautet dieselbe:

$$z = 18400 \log^{10} \frac{p_0}{p} \text{ [meter]}. \tag{288}$$

In dem Verhältnis $p_0 : p$ mißt man am bequemsten Zähler und Nenner in Millimetern Quecksilber.

In der freien Atmosphäre ist die hier vorausgesetzte Gleichmäßigkeit der Temperatur nur in seltenen Fällen erfüllt, da die Ausgleichung der Temperaturen zwischen den verschiedenen Luftschichten durch Wärmeleitung sich verhältnismäßig langsam vollzieht und beständig durch Luftströmungen gestört wird. Dann verliert die Formel (285) mit den Folgerungen daraus im allgemeinen ihre Gültigkeit, weil der Druck außer von der Dichte auch von der Temperatur abhängt. Aber man darf nicht glauben, daß die Gleichmäßigkeit der Temperatur eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der hier entwickelten Theorie, speziell für die Benutzung der Hypothese der vollkommenen Elastizität (§ 21) bildet. Denn diese Hypothese verlangt nicht, daß die Temperatur konstant bleibt, sondern sie verlangt nur, daß der Druck p ausschließlich von der Dichte k abhängt. Die Temperatur darf sich dabei sehr wohl ändern, nur muß sie auch ihrerseits durch die Dichte vollkommen bestimmt sein. Ein wichtiger Fall, in welchem diese Bedingung zutrifft, findet sich dann verwirklicht, wenn jegliche Wärmeleitung ausgeschlossen ist, wenn also alle Volumenänderungen nicht „isotherm", bei konstanter Temperatur, sondern „adiabatisch", bei Verhinderung des Übergangs der Wärme von einem Substanzteilchen zu einem benachbarten, verlaufen. Die isothermen Vorgänge entsprechen dem Grenzfall einer unendlich großen, die adiabatischen dem einer unendlich kleinen Wärmeleitungsfähigkeit der Substanz. Auch bei den letzteren hängt der Druck ausschließlich von der Dichte ab, es gilt also auch für sie die Gleichung (211) der vollkommenen Elastizität, aber die Form der Funktion $f(k)$ ist nicht mehr die isotherme (285), sondern die adiabatische:

$$p = c' k^{\gamma}, \tag{289}$$

wo die Konstante γ für Luft den Wert 1,405 besitzt, während c' sich wieder aus der Gleichung:

$$c' = \frac{p_0}{k_0^{\gamma}} \tag{290}$$

ergibt. Bei adiabatischen Vorgängen wächst also der Druck bei der Kompression stärker, und nimmt andererseits bei der Dilatation stärker ab als bei isothermen Vorgängen, was daher rührt, daß die Luft sich bei adiabatischer Kompression erwärmt, bei adiabatischer Dilatation abkühlt.

Wenn man nun die Formel (289) in (281) einführt, so ergibt sich bei analoger Behandlung die barometrische Höhenformel für adiabatisches Gleichgewicht:

$$z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_0}{g k_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right), \tag{291}$$

oder mit Benutzung der angegebenen Zahlenwerte:

$$z = 63800 \left(1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0{,}288} \right) [\text{meter}]. \tag{292}$$

Diese Druckabnahme mit der Höhe entspricht also der Voraussetzung, daß in jeder Luftschicht die Temperatur gerade diejenige ist, welche sich bei adiabatischer Ausdehnung der Luft von 0° C und Atmosphärendruck bis zu der Dichte der betreffenden Schicht ergibt.

Eine wichtigere Rolle als bei Gleichgewichtszuständen spielen die adiabatischen Vorgänge bei Schwingungsvorgängen, weil hier die durch die abwechselnde Kompression und Dilatation bewirkten Temperaturerhöhungen und -erniedrigungen so schnell aufeinander folgen, daß die namentlich bei Gasen sehr geringe Wärmeleitung praktisch ganz vernachlässigt werden kann. Daher darf man bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit aus (215) für Gase Gebrauch machen von der Formel (289), welche in Verbindung mit (290) für die Schallgeschwindigkeit eines Gases bei der Dichte k_0 und dem Drucke p_0 ergibt:

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{k_0}, \tag{293}$$

also für Luft bei 0° C und Atmosphärendruck nach den angegebenen Zahlenwerten:

$$a = 332 \left[\frac{\text{met}}{\text{sec}} \right],$$

in Übereinstimmung mit den Messungen.

Die isotherme Kompressibilität (285) würde aus (215) ergeben:

$$a^2 = \frac{p_0}{k_0}, \tag{294}$$

und daraus für Luft von derselben Temperatur und Dichte:

$$a = 280 \left[\frac{\text{met}}{\text{sec}}\right],$$

also erheblich zu klein.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist der Unterschied zwischen adiabatischer und isothermer Kompressibilität sehr gering.

§ 57. Wir wollen jetzt, als ein weiteres einfaches Beispiel für die Anwendung der hydrodynamischen Grundgleichungen, den Fall einer mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotierenden inkompressibeln Flüssigkeit betrachten. Hier ist die Bewegung aller Massenpunkte von vornherein gegeben. Machen wir nämlich die Drehungsachse zur z-Achse, so ergibt sich die Lage eines Flüssigkeitspunktes a, b, c zur Zeit t aus den Gleichungen (11), wenn man darin setzt:

$$(295)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \cos(\omega t), & \alpha_2 = -\sin(\omega t), & \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \sin(\omega t), & \beta_2 = \cos(\omega t), & \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 1, \end{cases}$$

also:

$$(296)\quad \begin{cases} x = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t), \\ y = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ z = c. \end{cases}$$

Differentiiert man nun diese Gleichungen zweimal „substanziell" nach der Zeit t, so ergibt sich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

und durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (265):

$$-\omega^2 x + \frac{\partial(V+P)}{\partial x} = 0, \quad -\omega^2 y + \frac{\partial(V+P)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(V+P)}{\partial z} = 0,$$

woraus durch Integration, mit Rücksicht auf (277), folgt:

$$(297)\qquad p = \frac{1}{2} k\omega^2\varrho^2 - kV + \text{const},$$

wenn ϱ die Entfernung des Aufpunktes (x, y, z) von der Rotationsachse bezeichnet. Wir wenden diese Gleichung auf ein paar interessante Fälle an.

§ 58. Eine inkompressible schwere Flüssigkeit rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in einem hohlen, oben offenen Kreiszylinder mit horizontalem Boden. Man denke sich z. B. die Flüssigkeit in einem Wasserglas mit einem Löffel kräftig umge-

rührt und dann den Löffel schnell herausgezogen. Um den dämpfenden Einfluß der Reibung an der Gefäßwand zu vermeiden, kann man annehmen, daß das Gefäß zugleich mitrotiert. Dann findet bei der gleichmäßigen Drehung überhaupt keinerlei Reibung statt, da die Bewegung ohne jede Deformation vor sich geht.

Aus (280) und (297) ergibt sich hier:

$$p = \frac{1}{2} k\omega^2\varrho^2 - kgz + \text{const}. \tag{298}$$

Die Form der freien Flüssigkeitsoberfläche wird nach § 55 bestimmt durch $p = \text{const}$, also durch:

$$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 - gz = \text{const}.$$

Das ist die Gleichung eines Rotationsparaboloides um die z-Achse. Setzen wir $z = z_0$ für $\varrho = 0$, so kommt:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\varrho^2. \tag{299}$$

Die Flüssigkeit steht also in der Mitte des Gefäßes am tiefsten, und steigt am Rande empor, proportional dem Quadrat der Umdrehungsgeschwindigkeit. Die Größe von z_0, und damit der absolute Betrag der Depression in der Mitte, wird, unabhängig von der Größe des äußeren Druckes, bestimmt durch das Volumen der Flüssigkeit, welches im Drehungszustand ebenso groß ist wie im Ruhezustand. Wenn also die ruhende Flüssigkeit das Gefäß bis zur Höhe $z = h$ ausfüllt, so gilt für das Volumen die Beziehung:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} z \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi = R^2 \pi \cdot h,$$

wobei R den Zylinderradius bezeichnet.

Mittels (299) ergibt sich hieraus:

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \tag{300}$$

Das zweite Glied rechts gibt den Betrag der Depression des Flüssigkeitsniveaus in der Mitte.

Die Erhebung am Rande ist der Wert von $z - h$ für $\varrho = R$ nach (299), nämlich:

$$z - h = \frac{\omega^2 R}{4g}, \tag{301}$$

also gerade ebenso groß wie die Niveaudepression in der Mitte.

In einem horizontalen Querschnitt ($z = \text{const}$) ist nach (298) der Druck veränderlich, in der Mitte am kleinsten, am Rande am größten. Auch dies läßt sich leicht beobachten, wenn man Sandkörner auf den Boden des als ruhend angenommenen Gefäßes streut, die so schwer sind, daß sie die Rotation nicht mitmachen. Diese Körner begeben sich nach dem Eintritt der Flüssigkeitsrotation unter dem Einfluß des Druckgefälles nach der Mitte des Gefäßbodens.

§ 59. Eine inkompressible Flüssigkeit, deren einzelne Teilchen gemäß dem Newtonschen Gesetz nach einem festen Zentrum gravitieren, rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch das Zentrum gehende Achse. Es wird nach der Form ihrer freien Oberfläche gefragt. Diese Aufgabe erhält ihr Hauptinteresse durch ihre Verwandtschaft mit dem Problem der Abplattung der Erde an den Polen. Wir wollen hier daher auch auf die bei der Erde vorliegenden Verhältnisse exemplifizieren.

Bedeutet r die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt O, so ist nach I. (111) das Gravitationspotential:

$$V = -\frac{c}{r}$$

und nach (67) und (263) die Anziehungskraft auf die Masseneinheit (Beschleunigung der Schwere)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{c}{r^2}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten c nehmen wir an, daß die Schwerebeschleunigung in der Entfernung r_0 gleich g_0 ist; dann haben wir:

$$g_0 = \frac{c}{r_0^2},$$

und allgemein:

(302) $$V = -\frac{g_0 r_0^2}{r}.$$

Dies ergibt nach (297) für die Form der freien Oberfläche die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 + \frac{g_0 r_0^2}{r} = \text{const}$$

oder, wenn wir an der Oberfläche für $\varrho = 0$ $r = r_0$ (Polradius) setzen:

(303) $$\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 = g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Führen wir statt ϱ den Winkel φ (geographische Breite) ein durch die Beziehung:

$$\varrho = r \cos \varphi ,$$

so geht (303) über in:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{\omega^2}{2 g_0 r_0^2} \cdot r^2 \cos^2 \varphi . \tag{304}$$

Für den speziellen Fall $\omega = 0$ (ruhende Flüssigkeit) ist r konstant, also die Oberfläche eine Kugel, für kleine Werte von ω ist daher die Oberfläche ein nur wenig von der Kugelgestalt abweichendes, an den Polen abgeplattetes Sphäroid, dessen Gleichung in erster Annäherung geschrieben werden kann:

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\omega^2 r_0}{2 g_0} \cos^2 \varphi\right). \tag{305}$$

Die Größe der Abplattung beträgt

$$\frac{r_{\max} - r_0}{r_0} = \frac{\omega^2 r_0}{2 g_0}, \tag{306}$$

das ergibt für die Erde, mit

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} [\mathrm{sec}^{-1}], \quad r_0 = 6{,}356 \cdot 10^8 [\mathrm{cm}], \quad g_0 = 983 \left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}\right],$$

den Wert $\frac{1}{585}$, während die tatsächliche Abplattung nicht unerheblich größer ist, nämlich $\frac{1}{298}$.

Die Differenz erklärt sich leicht daraus, daß die Massenteile der Erde nicht nach dem Erdmittelpunkt, sondern gegeneinander gravitieren, was offenbar die Abweichung von der Kugelgestalt begünstigt. Die Einführung der gegenseitigen Gravitation macht freilich die Aufgabe wesentlich verwickelter, weil der Ausdruck des Gravitationspotentials V dann nicht mehr von vornherein gegeben ist, sondern selber erst von der zu bestimmenden Form der Oberfläche abhängt. Die näheren Untersuchungen haben gezeigt, daß das so formulierte Problem keine eindeutige Lösung besitzt, d. h. es sind sehr verschiedene Formen der Oberfläche möglich; unter ihnen befindet sich auch ein Rotationsellipsoid von bestimmter Größe der Abplattung.

Beschränkt man sich auf kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit, also auf geringe Abweichung von der Kugelgestalt, so kann man bei Einführung der gegenseitigen Gravitation die Anziehungskraft auf ein Flüssigkeitsteilchen mit gewisser Annähe-

rung nach I. (102) direkt proportional der Entfernung r vom Erdmittelpunkt setzen, also das Potential V proportional r^2. Führt man die Rechnung unter dieser Voraussetzung genau nach der vorstehenden Methode durch, so ergibt sich als Betrag der Abplattung wiederum der Ausdruck (306), was offenbar darauf zurückzuführen ist, daß bei kleinen Abweichungen von der Kugelgestalt die Form des Gesetzes, nach dem V von r abhängt, für die Größe der Abplattung nicht wesentlich in Betracht kommt.

§ 60. Wir wollen nunmehr die allgemeine Behandlung der Theorie wieder aufnehmen und zuerst eine wichtige Integration der hydrodynamischen Gleichungen durchführen, die von Helmholtz entdeckt worden ist. Sie besitzt für die Hydrodynamik eine ähnliche Bedeutung wie das Prinzip der Flächen für die allgemeine Mechanik.

Gehen wir von den drei Lagrangeschen Gleichungen (267) aus, die den drei Buchstaben a, b, c entsprechen, so lassen sich offenbar die Funktionen V und P dadurch aus ihnen eliminieren, daß man etwa die a-Gleichung nach b, die b-Gleichung nach a differenziert und die entstehenden Gleichungen voneinander subtrahiert. Die Durchführung dieses Verfahrens liefert wiederum drei Gleichungen, die den Buchstaben a, b, c entsprechen. Wir wollen die Rechnung zunächst nur für die a-Gleichung ausführen. Dieselbe lautet:

$$\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}\right)-\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}\right)=0$$

und nach Ausführung der Differenziationen:

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dx}{db}\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

wobei das Summenzeichen bedeutet, daß zu dem hingeschriebenen x-Glied noch ein y-Glied und ein z-Glied zu addieren ist. Dieser Ausdruck läßt sich als ein Differentialquotient nach der Zeit t schreiben, nämlich:

$$\sum_{x,y,z}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dc}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{dc}\right)=0,$$

wie man durch Ausführung der Differenziation nach t erkennt, da von den entstehenden vier Gliedern zwei sich gegenseitig fortheben.

Wir erhalten also durch Integration:

$$\sum_{x,y,z} \frac{dx}{dc}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{du}{dc} = A\,, \tag{307a}$$

wobei die Größe A nur von a, b, c, nicht aber von t abhängt. Ganz ebenso ergibt sich der b-Ausdruck (307b) $= B$ und der c-Ausdruck (307c) $= C$, wobei B und C dieselbe Eigenschaft besitzen wie A.

Um nun die drei auf die Buchstaben a, b, c bezüglichen Gleichungen in drei auf x, y, z bezügliche Gleichungen zu verwandeln, multiplizieren wir die drei Gleichungen (307) der Reihe nach zunächst mit $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}$ und addieren. Dann ergibt sich durch passende Zusammenfassung entsprechender Glieder, die sich teilweise forthebeñ, teilweise durch das in (8) eingeführte Symbol ausdrücken lassen:

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right] - \frac{dv}{da}\left[\frac{dz}{da}\right] = A\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc} \tag{308x}$$

und entsprechend die beiden Gleichungen (308y) und (308z).

Nun ist nach (53):

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right] = D\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\,,$$

wo D die Funktionaldeterminante (51) bezeichnet; also geht (308x) über in:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(A\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}\right)$$

und mit Berücksichtigung einerseits von (59) und (256), andererseits von (261):

$$\xi = \frac{k}{2k_0}\left(A\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}\right). \tag{309x}$$

Analog lauten die Gleichungen (309y) und (309z) für η und ζ.

Um die Werte der von t unabhängigen „Integrationskonstanten" A, B, C zu bestimmen, setzen wir in den drei Gleichungen (309) $t = 0$. Dann ergibt sich, da nach (1a) $\left(\frac{dx}{da}\right)_0 = 1$, $\left(\frac{dx}{db}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{dx}{dc}\right)_0 = 0$, usw.:

$$\xi_0 = \frac{1}{2}A\,, \quad \eta_0 = \frac{1}{2}B\,, \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}C\,,$$

folglich allgemein:

$$(310)\quad \begin{cases} \xi = \frac{k}{k_0}\left(\xi_0 \frac{dx}{da} + \eta_0 \frac{dx}{db} + \zeta_0 \frac{dx}{dc}\right), \\ \eta = \frac{k}{k_0}\left(\xi_0 \frac{dy}{da} + \eta_0 \frac{dy}{db} + \zeta_0 \frac{dy}{dc}\right), \\ \zeta = \frac{k}{k_0}\left(\xi_0 \frac{dz}{da} + \eta_0 \frac{dz}{db} + \zeta_0 \frac{dz}{dc}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten eine Fülle von Folgerungen, die alle darauf beruhen, daß die Größen k_0, ξ_0, η_0, ζ_0 nur von a, b, c, nicht aber von t abhängen.

Betrachten wir zunächst ein Flüssigkeitsteilchen a, b, c, dessen Drehungsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gleich Null ist. Dann verschwinden die darauf bezüglichen Komponenten ξ_0, η_0, ζ_0, und es folgt aus (310):

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

d. h. ein Flüssigkeitsteilchen, das in einem gewissen Zeitpunkt rotationslos ist, behält diese Eigenschaft für alle Zeiten bei.

Betrachten wir weiter zur Zeit $t = 0$, bei der ja die a, b, c mit den x, y, z zusammenfallen, solche Flüssigkeitsteilchen a, b, c, für welche die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit sämtlich oder teilweise von Null verschieden sind, so können wir uns dadurch eine Anschauung bilden von der räumlichen Anordnung dieses Vektors (ξ_0, η_0, ζ_0), daß wir uns folgende Kurvenschar konstruiert denken:

$$(311)\qquad da : db : dc = \xi_0 : \eta_0 : \zeta_0.$$

Jede dieser Kurven besitzt die Eigenschaft, daß die Tangente in irgendeinem ihrer Punkte zusammenfällt mit der Richtung der Drehungsaxe in diesem Punkt. Daher heißt eine solche Kurve eine Wirbellinie der Flüssigkeit. Wir wollen nun diejenigen materiellen Punkte a, b, c, welche für $t = 0$ zu einer Wirbellinie gehören und daher durch die Gleichung (311) miteinander verknüpft sind, auch für spätere Zeiten t im Auge behalten und nach ihren Drehungsgeschwindigkeiten fragen. Dieselben ergeben sich aus (310) nach Größe und Richtung. Was zunächst die Richtung betrifft, so haben wir durch Einsetzen der Werte von ξ_0, η_0, ζ_0 aus (311):

$$(312)\qquad \xi : \eta : \zeta = dx : dy : dz,$$

d. h. die Kurve, welche die von uns betrachteten materiellen Punkte im Raume bilden, besitzt wiederum die Eigenschaft einer Wirbel-

linie, oder: die Wirbellinien bestehen stets aus den nämlichen materiellen Punkten.

Daher bildet eine jede Wirbellinie ein individuelles substanzielles Gebilde, das im Laufe der Bewegung wohl seine Lage und seine Form, niemals aber seine materielle Zusammensetzung und seine durch (312) charakterisierte Grundeigenschaft ändert. Eine Wirbellinie kann in sich selber zurücklaufen, oder sie kann bis ins Unendliche oder bis an die Oberfläche der Flüssigkeit gehen.

Auch über die Größe ω der Drehungs- oder Wirbelgeschwindigkeit geben die Gleichungen (310) Aufschluß.

Betrachten wir nämlich zur Zeit $t = 0$ ein Längenelement $ds_0 = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$ einer Wirbellinie, so ist nach (311):

$$\frac{\xi_0}{\omega_0} = \frac{da}{ds_0}, \quad \frac{\eta_0}{\omega_0} = \frac{db}{ds_0}, \quad \frac{\zeta_0}{\omega_0} = \frac{dc}{ds_0},$$

und durch Substitution in (310):

$$\xi = \frac{k}{k_0}\,\omega_0 \frac{dx}{ds_0}, \quad \eta = \frac{k}{k_0}\,\omega_0 \frac{dy}{ds_0}, \quad \zeta = \frac{k}{k_0}\,\omega_0 \frac{dz}{ds_0},$$

folglich die Drehungsgeschwindigkeit zur Zeit t:

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{k}{k_0}\,\omega_0 \cdot \frac{ds}{ds_0}, \tag{313}$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit in irgendeinem Punkt der Wirbellinie ist proportional der Dichte der Flüssigkeit und der Länge eines Bogenelements der Linie, falls das Bogenelement sich stets über die nämlichen materiellen Punkte erstreckt. Wenn sich also z. B. im Laufe der Zeit das Bogenelement verlängert, indem die dasselbe bildenden materiellen Punkte auseinanderrücken, während k unverändert bleibt, so erhöht sich die Wirbelgeschwindigkeit.

Noch anschaulicher wird dieser Satz durch eine etwas veränderte Fassung. Denken wir uns in der Flüssigkeit ein ganz beliebiges Flächenstück, und ziehen durch jeden seiner Randpunkte die Wirbellinie, so wird dadurch in der Flüssigkeit ein Raum abgegrenzt, den man als „Wirbelfaden" oder „Wirbelröhre" bezeichnet. Der Mantel der Röhre wird von lauter Wirbellinien gebildet, während das zu Anfang gedachte Flächenstück einen Querschnitt derselben darstellt. Man kann sich den gesamten Flüssigkeitsraum als aus lauter unendlich dünnen Wirbelfäden zusammengesetzt denken, die entweder in sich zurücklaufen oder ins Unendliche oder an die Oberfläche der Flüssigkeit gehen. Wie die Wirbellinien, so bestehen natürlich auch die Wirbelfäden stets aus den nämlichen materiellen Punkten.

Betrachten wir nun ein unendlich kurzes Stück eines solchen unendlich dünnen Wirbelfadens, indem wir durch zwei im Abstand ds voneinander befindlichen Punkte einer zu dem Wirbelfaden gehörigen Wirbellinie parallele, im übrigen beliebig gerichtete Querschnitte von der Fläche f legen, und behalten wir die zu diesem Wirbelfadenstück gehörigen materiellen Punkte für verschiedene Zeiten im Auge, so ist, da die Masse des Wirbelfadenstücks unveränderlich ist:

$$k \cdot f \cdot ds \cdot \cos\vartheta = k_0 f_0 ds_0 \cos\vartheta_0 ,$$

wenn wir mit ϑ den spitzen Winkel bezeichnen, welchen die Querschnittsnormale mit ds, d. h. mit der Wirbelachse, bildet. Dadurch geht (313) über in:

$$\omega \cdot f \cdot \cos\vartheta = \omega_0 f_0 \cos\vartheta_0 = \omega \cdot f_n , \tag{314}$$

wobei f_n die Fläche des zur Wirbelachse normalen Querschnitts bedeutet. Das Produkt der Wirbelgeschwindigkeit und des Normalquerschnitts eines Wirbelfadens ändert sich also nicht mit der Zeit.

Aber dies Produkt besitzt auch an verschiedenen Stellen eines bestimmten Wirbelfadens den nämlichen Wert. Denn wenn wir die aus (59) folgende Identität:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{315}$$

über einen beliebigen Flüssigkeitsraum integrieren und jede der drei dabei entstehenden Raumintegrale nach (78) umformen, so erhalten wir für das über die Oberfläche des Raums zu erstreckende Integral:

$$\int \left(\xi \cos(\nu x) + \eta \cos(\nu y) + \zeta \cos(\nu z)\right) d\sigma = \int \omega \cos(\nu, \omega) \cdot d\sigma = 0 . \tag{316}$$

Ist nun der Flüssigkeitsraum ein beliebig langes Stück eines Wirbelfadens, so verschwinden in diesem Oberflächenintegral alle diejenigen Glieder, welche sich auf die Mantelfläche des Fadens beziehen, weil in jedem Punkt des Mantels die Flächennormale ν senkrecht steht auf der Richtung der im Mantel liegenden Wirbelachse. Es bleiben also nur die auf die beiden Querschnitte bezüglichen Glieder übrig, und wenn der Wirbelfaden unendlich dünn ist, aber von endlicher Länge, mit dem beliebig gerichteten Anfangsquerschnitt f und dem beliebig gerichteten Endquerschnitt f', so reduziert sich die Gleichung (316) auf die beiden Glieder:

$$\omega \cos(\nu, \omega) \cdot f + \omega' \cos(\nu', \omega') \cdot f' = 0 ,$$

oder, wenn wir wieder mit ϑ den spitzen Winkel zwischen der Querschnittsnormalen und der Wirbelachse bezeichnen, und außerdem bedenken, daß die Wirbelachsen ω, ω' in dem nämlichen Sinne, die inneren Normalen ν, ν' dagegen in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind:

$$\omega f \cos\vartheta - \omega' f' \cos\vartheta' = 0\,, \tag{317}$$

was mit (314) kombiniert den Satz ergibt: Für einen unendlich dünnen Wirbelfaden besitzt das Produkt der Wirbelgeschwindigkeit in den Normalquerschnitt an allen Stellen des Fadens und zu allen Zeiten den nämlichen Wert. Man nennt dies Produkt auch das „Moment" des Wirbelfadens.

Die Gültigkeit der im Vorstehenden entwickelten Gesetze der Wirbelbewegungen ist selbstverständlich geknüpft an die Voraussetzung vollkommen elastischer (§ 53) Flüssigkeiten. In der Natur finden stets mehr oder weniger beträchtliche Abweichungen von dieser Voraussetzung statt, welche zur Folge haben, daß, entgegen jenen Gesetzen, Wirbel sowohl entstehen als auch vergehen können. Derartige Abweichungen werden namentlich bedingt durch die Erscheinungen der Reibung und der Wärmeleitung. Die Reibung bewirkt, daß im Innern der Flüssigkeit Druckkräfte auftreten, welche nicht von der augenblicklichen Deformation, sondern von der augenblicklichen Deformationsgeschwindigkeit abhängen (§ 78), die Wärmeleitung bewirkt, daß der Druck nicht allein von der Dichte abhängt und daher die Gleichung (211) nicht erfüllt ist. Nur in den Grenzfällen der unendlich großen Wärmeleitung (isotherme Vorgänge) und der unendlich kleinen Wärmeleitung (adiabatische Vorgänge) kann man, wie wir im § 56 gesehen haben, die Flüssigkeit als vollkommen elastisch ansehen und daher die Wirbelgesetze für sie als gültig annehmen.

Zweites Kapitel. Wirbelfreie Bewegungen.

§ 61. Nachdem wir durch die Integration der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen die fundamentale Bedeutung der Wirbelbewegungen kennen gelernt haben, ergibt sich für die folgende Behandlung naturgemäß die Einteilung der Flüssigkeitsbewegungen in wirbelfreie (irrotationale) und Wirbelbewegungen. Wir betrachten zunächst die ersteren. Für sie ist charakteristisch die Bedingung:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{q} = 0\,, \tag{318}$$

oder auch:

$$\mathfrak{q} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{319}$$

d. h. es existiert eine Funktion φ, das „Geschwindigkeitspotential", deren partielle Abgeleitete nach x, y, z die bezüglichen Komponenten der Geschwindigkeit liefern. (Vgl. oben (217) und (218).) Wir wissen aus dem Vorhergehenden, daß, wenn die Gleichung (318) bzw. (319) für irgendeinen Zeitpunkt gilt, dies auch für alle anderen Zeiten der Fall ist.

Gewöhnlich definiert man das Geschwindigkeitspotential φ mit entgegengesetztem Vorzeichen als wir es hier tun, indem man in der Gleichung (319) das + Zeichen setzt. Wenn wir aber die Analogie mit dem Kräftepotential und dem elastischen Potential, sowie auch mit dem elektrischen und thermodynamischen Potential aufrecht erhalten wollen, so müssen wir auch beim Geschwindigkeitspotential die Richtung des Vektors $\mathfrak{q}$ der des betreffenden Gradienten entgegengesetzt annehmen. Dann ist die Geschwindigkeit, ebenso wie die Kraft beim Kräftepotential, im Sinne des abnehmenden Potentials gerichtet. In dem Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials bleibt nach (319) eine additive Zeitfunktion völlig unbestimmt und daher physikalisch bedeutungslos.

Einen guten Überblick über den Geschwindigkeitszustand der Flüssigkeit in irgendeinem Zeitpunkt t verschafft man sich durch die Konstruktion der Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials: $\varphi = \text{const}$, und der dieselben senkrecht durchschneidenden Kurven:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{320}$$

der sogenannten „Stromlinien", welche in jedem ihrer Punkte die Richtung der Geschwindigkeit angeben, in vollkommener Analogie mit den Niveauflächen und Kraftlinien (I. § 40). Da eine Stromlinie stets von höherem zu tieferem Geschwindigkeitspotential geht, so kann sie nicht in sich selber zurücklaufen, falls das Geschwindigkeitspotential eindeutig und stetig ist. Wir werden freilich später (§ 68) auch auf wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen mit geschlossenen Stromlinien stoßen und dann die Folgerung ziehen müssen, daß eine bestimmte wirbelfreie Bewegung auch ein mehrdeutiges oder ein unstetiges Geschwindigkeitspotential besitzen kann.

Aus dem Begriff der Stromlinie entspringt auch sogleich der des „Stromfadens" oder der „Stromröhre", welche dadurch charakterisiert ist, daß ihre Mantelfläche von Stromlinien gebildet wird;

der Stromfaden verhält sich zur Stromlinie genau ebenso wie der Wirbelfaden zur Wirbellinie. Die Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials sind natürlich zu den Stromfäden orthogonal.

Wenn die Flüssigkeitsbewegung nicht stationär ist, wird das System der Stromlinien und Stromfäden zu verschiedenen Zeiten verschieden sein, d. h. die Stromlinien werden sich mit der Zeit verändern. Doch ist dabei wohl zu beachten, daß es keinen Sinn hat, von der Bewegung einer bestimmten Stromlinie zu sprechen. Denn die Flüssigkeitspunkte, welche zu einer gewissen Zeit eine Stromlinie bilden, werden das zu einer anderen Zeit nicht mehr tun. Es ist also im allgemeinen gar nicht möglich, einer Stromlinie zu einer Zeit eine bestimmte Stromlinie zu einer anderen Zeit zuzuordnen. Hierin liegt ein prinzipieller Unterschied der Stromlinien gegenüber den Wirbellinien, welche ja stets von den nämlichen Flüssigkeitspunkten gebildet werden und daher eine individuelle Bedeutung besitzen.

Da die Bedingung der Wirbellosigkeit am bequemsten mittels der Raumkoordinaten x, y, z als unabhängigen Variabeln ausgedrückt wird, so eignen sich zur Darstellung der wirbelfreien Bewegungen am besten die Bewegungsgleichungen in der Eulerschen Form (268). Dieselben lassen sich mit Benutzung von (319) schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

usw., und liefern, nach x, y, z integriert:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t),$$

oder, da, wie wir schon bemerkt haben, in dem Werte des Geschwindigkeitspotentials eine additive Zeitfunktion willkürlich ist:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{321}$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die Kontinuitätsgleichung (259) hinzu, und die durch die Natur der Flüssigkeit bedingte Beziehung zwischen Druck und Dichte. Dann hat man drei Gleichungen, aus denen die drei Größen φ, p, k mit Hilfe der dem besonderen Fall entsprechenden Anfangs- und Grenzbedingungen als Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y, z, t bestimmt werden können.

§ 62. Stationäre Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit. Wenn die Bewegung stationär ist, sind die Größen

$\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ alle $= 0$, und man erhält durch Integration dieser Gleichungen nach x, y, z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Wenn ferner die Flüssigkeit inkompressibel und schwer ist, so nimmt P den Wert (277), V den Wert (280) an, und die Gleichung (321) geht über in:

$$p = -\frac{k}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - kgz + \text{const.}, \tag{322}$$

während die Kontinuitätsgleichung (259) sich reduziert auf:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{323}$$

Das ist die bekannte Laplacesche Gleichung (I. (129)). Jede von der Zeit t unabhängige Lösung dieser Differentialgleichung stellt eine in der Natur mögliche wirbelfreie stationäre Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit dar, bei welcher der Druck p durch (322) bestimmt ist. Wie man sieht, setzt sich der Druck aus zwei Teilen zusammen, von denen der erste häufig als hydrodynamischer, der zweite, mit (282) identische, als hydrostatischer Druck bezeichnet wird. Der hydrodynamische Druck hängt nur von der Größe der Geschwindigkeit ab, und zwar ändert er sich mit ihr in entgegengesetztem Sinne. Mit der Richtung der Flüssigkeitsbewegung hat aber weder der Druck selber, noch das Druckgefälle irgend etwas zu tun, wofür wir in den folgenden Paragraphen einige bemerkenswerte Beispiele kennen lernen werden.

Fassen wir innerhalb der Flüssigkeit einen bestimmten fest abgegrenzten Raum ins Auge und integrieren die Kontinuitätsgleichung (323) über diesen Raum, so ergibt sich nach (82):

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = 0. \tag{324}$$

Diese Gleichung gewinnt eine sehr anschauliche Bedeutung, wenn man bedenkt, daß

$$-k\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma\, dt = k\, q_\nu\, d\sigma\, dt \tag{325}$$

diejenige Flüssigkeitsmenge darstellt, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement $d\sigma$ in das Innere des Raumes hineinströmt. Sie besagt nämlich, daß die im ganzen durch alle Oberflächenelemente in den betrachteten Raum hineinströmende Flüssigkeitsmenge gleich Null ist, oder daß ebensoviel Flüssigkeit hinaus- wie hineinströmt.

Wenn der betrachtete Raum ein beliebig langes Stück einer Stromröhre von beliebig großem Querschnitt ist, so fallen diejenigen Teile des Oberflächenintegrals (324), die sich auf die Mantelfläche der Röhre beziehen, fort, und die Gleichung reduziert sich auf den Satz, daß in einer Stromröhre durch jeden Querschnitt die nämliche Flüssigkeitsmenge strömt. Diese Menge ist daher für die betreffende Stromröhre charakteristisch, man bezeichnet sie, auf die Zeiteinheit bezogen, auch als die „Stromintensität“ oder „Stromstärke“ der Röhre:

$$J = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma, \tag{326}$$

wo nun das Integral über irgendeinen beliebig geformten Querschnitt der Röhre zu erstrecken ist, und die Richtung von ν im Sinne der Strömung gewählt werden muß.

Läßt man den Querschnitt mit einer Fläche $\varphi = \text{const.}$ zusammenfallen, so wird die Richtung von ν diejenige der Geschwindigkeit q, und man erhält:

$$J = k \int q \, d\sigma. \tag{327}$$

§ 63. Bei jeder beliebigen Stromröhre kann man sich die Mantelfläche durch eine feste Wand ersetzt denken, ohne die Flüssigkeitsbewegung dadurch irgendwie zu stören; denn die für die feste Wand gültige Grenzbedingung, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet, ist an der Mantelfläche der Stromröhre stets erfüllt. Dadurch gewinnen die Stromröhren unmittelbar praktische Bedeutung. Ist der Querschnitt nicht zu groß und die Strömungsgeschwindigkeit nicht zu ungleichmäßig an Größe und Richtung in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts, wie das z. B. bei Wasserleitungen vorkommt, so kann man mit gewisser Annäherung die Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials als eben betrachten und in (327) q vor das Integralzeichen setzen; mithin:

$$J = k \cdot q \cdot f, \tag{328}$$

wo f den normalen Querschnitt der Röhre bezeichnet. Da J und k längs der ganzen Röhre konstant sind, so ist demnach die Größe der Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Querschnitt f der Röhre, oder:

$$q = \frac{f_0 q_0}{f}, \tag{329}$$

wenn irgendein bestimmter Querschnitt, z. B. der Anfangsquerschnitt, mit dem Index Null bezeichnet wird. Daraus ergibt sich

dann auch nach (322) der Druck in irgendeinem Querschnitt f der Röhre:

$$p - p_0 = -\frac{k}{2} q_0^2 \left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1\right) + kg(z_0 - z). \tag{330}$$

Wie man sieht, ist der Druck an den engsten Stellen der Röhre am kleinsten, und zwar kann man, prinzipiell genommen, bei bestimmtem q_0 und f_0 durch gehörige Verengerung des Rohres, d. h. durch gehörige Verkleinerung von f, eine beliebige Abnahme des Druckes, entsprechend der Zunahme der Geschwindigkeit, erzielen. Bohrt man an einer solchen engen Stelle ein feines Loch in die Wandung des Rohres und stellt dadurch eine Kommunikation her mit der unter normalem Druck p_0 befindlichen Außenluft, so wird durch die Druckdifferenz $p_0 - p$ die Luft in das Rohr getrieben und von der Flüssigkeit mit fortgerissen. Von diesem Umstand wird u. a. bei den hydraulischen Luftpumpen Gebrauch gemacht. Auch die sogenannten Zerstäubungsapparate beruhen auf der Abnahme des Druckes mit wachsender Geschwindigkeit.

Das von der Schwere herrührende Glied der Beziehung (330) kann ebenfalls dazu benutzt werden, um den Druck p zu verkleinern, so z. B. bei der Bunsenschen Wasserluftpumpe, bei der das Wasser in einem vertikalen zylindrischen ($f = f_0$) Rohr herabfällt, so daß die Druckdifferenz an zwei Stellen einfach proportional ist der Höhendifferenz $z_0 - z$.

Die Gleichungen (329) und (330) lassen sich auch umgekehrt dazu verwerten, um bei gegebener Druckdifferenz $p_0 - p$ am Anfang und Ende der Röhre die stationären Geschwindigkeiten q_0 und q zu finden, mit denen die Flüssigkeit das Rohr durchströmt. Berechnen wir z. B. die stationäre Ausflußgeschwindigkeit aus einem oben weiten, unten engen Rohr, indem wir annehmen, daß das obere Niveau der Flüssigkeit unter dem Drucke p_0, die Ausflußöffnung dagegen unter dem Drucke p gehalten wird. Dann ergibt sich, wenn wir f gegen f_0 vernachlässigen und die Höhendifferenz der beiden Niveaus mit h bezeichnen, aus (330) und (329) für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$q^2 = 2gh + \frac{2}{k}(p_0 - p). \tag{331}$$

Ist der Druck oben und unten gleich groß, so ist $q = \sqrt{2gh}$, d. h. die Ausflußgeschwindigkeit ist ebenso groß wie die Geschwindigkeit eines durch die Höhe h frei herabgefallenen Körpers (Theorem von Torricelli). Durch eine Druckdifferenz aber wird, je nach

ihrem Vorzeichen, der Ausfluß beschleunigt oder verzögert. Damit q reell bleibt, darf jedoch die Druckdifferenz den Wert $-hkg$ nicht unterschreiten. Im Grenzfall wird die stationäre Ausflußgeschwindigkeit Null, und wir erhalten für die Druckdifferenz die bekannte Barometerformel (283).

In Wirklichkeit ist die Ausflußmenge der Flüssigkeit stets beträchtlich (etwa um ein Drittel) kleiner als die aus der Ausflußgeschwindigkeit (331) und der Größe f der Ausflußöffnung nach (328) berechnete. Dies rührt im wesentlichen daher, daß die Fläche $\varphi =$ const. in der Ausflußöffnung keineswegs eben, sondern, von außen betrachtet, konkav ist, da die Stromlinien sich, aus dem Innern der Flüssigkeit kommend, gegen die enge Ausflußöffnung hin zusammendrängen, ähnlich wie die Erzeugenden eines Kegels gegen die Spitze desselben. Daher verhalten sich die Flächen $\varphi =$ const. hier ähnlich wie die Kugelflächen, welche die Kegelspitze konzentrisch umgeben. Die Folge davon ist, daß die Strömungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Punkten der Ausflußöffnung nicht gleichgerichtet ist, wie das bei der Anwendung der Gleichung (328) vorausgesetzt wird, sondern daß die Stromlinien konvergieren und daher der Querschnitt der Stromröhre sich hinter der Ausflußöffnung, da, wo die Flüssigkeit schon einen freien Strahl (§ 67) bildet, noch etwas mehr verengert. Besseren Anschluß an die Wirklichkeit erhält man offenbar, wenn man in der Gleichung (328) für f statt der Größe der Ausflußöffnung den kleineren Querschnitt einsetzt, welchen der Flüssigkeitsstrahl nach erfolgter Kontraktion besitzt, weil dort die Stromlinien eher parallel verlaufen.

Eine bedeutende Steigerung der Ausflußmenge läßt sich erzielen durch ein passend gewähltes zylindrisches oder noch besser konisches, nach außen sich erweiterndes Ansatzrohr. Dies Mittel läuft offenbar im wesentlichen darauf hinaus, die Stromlinien beim Ausfluß parallel bzw. divergent zu machen und dadurch die Kontraktion des Strahles zu vermeiden. Näheres über die Strömung in einem konischen Rohr findet sich im folgenden Paragraphen.

Wenn die Röhrenwandung nicht überall stetig gekrümmt ist, sondern an einer Stelle einen Winkel bildet, so besitzt diejenige Stromlinie, welche in der Wandung verläuft und durch die Spitze des Winkels hindurchgeht, in diesem Punkt eine Singularität, da hier die Richtung der Linie zweideutig wird. Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sind also in einem solchen Winkel entweder Null oder unendlich. Welcher von beiden Fällen eintritt,

erhellt aus folgender Betrachtung. Bildet die Wand, von der Flüssigkeit aus gesehen, einen konkaven Winkel ($<\pi$), wie im Punkte A der Fig. 11, so verlaufen die auf die Wandung rechtwinklig aufstoßenden, in der Figur durch Linien bezeichneten Flächen $\varphi = \text{const.}$ in der Art, daß sie bei der Annäherung an A sich von der singulären, durch A hindurchgehenden Potentialfläche entfernen. Dann wird also der Gradient von φ und mit ihm die Größe der Geschwindigkeit im Punkte A gleich Null (vgl. I. § 40), infolgedessen nach (322) der Druck p ein Maximum. Bildet aber die Wand einen konvexen, in die Flüssigkeit einspringenden Winkel ($>\pi$), wie im Punkte B derselben Figur, so konvergieren die Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials gegen den singulären Punkt, der Gradient von φ und die Größe der Geschwindigkeit wird dort also ∞, folglich der Druck $p = -\infty$, und die Flüssigkeit müßte eine unendlich große Kohäsion besitzen, um dort nicht zu zerreißen.

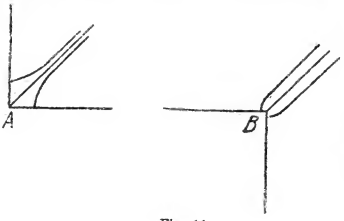

Fig. 11.

§ 64. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung einiger einfacher partikulärer Lösungen der Potentialgleichung (323) und der ihnen entsprechenden Flüssigkeitsbewegungen. Die einfachste Lösung ist die, daß φ linear von x, y, z abhängt. Ihr entspricht eine gleichförmige Translationsbewegung der Flüssigkeit, die hier nicht weiter interessiert.

Eine allgemeinere Lösung ist (nach I. (125) und (129)):

$$\varphi = \sum \frac{\mu_1}{r_1}, \tag{332}$$

wo r_1 die Entfernung des Aufpunktes von einem festen Zentrum 1, μ_1 eine für dieses Zentrum charakteristische Konstante bezeichnet, und die Summation über beliebig viele verschiedene Zentren zu erstrecken ist. Da das Geschwindigkeitspotential bei unbegrenzter Annäherung des Aufpunktes an irgendein festes Zentrum unendlich groß wird, müssen die festen Zentren selber von dem Flüssigkeitsraum ausgeschlossen gedacht werden, was durch beliebige kleine geschlossene Flächen geschehen kann, welche die einzelnen Zentren unmittelbar umgeben.

Betrachten wir zunächst den speziellen Fall eines einzigen Zentrums:

$$\varphi = \frac{\mu}{r}. \tag{333}$$

Hier sind die Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials die konzentrischen Kugelflächen, die Stromlinien also die Erzeugenden des geradlinigen orthogonalen Strahlenbündels. Ist μ positiv, so strömt die Flüssigkeit vom Zentrum nach allen Richtungen fort, und wir haben dort einen sogenannten „Quellpunkt". Ist μ negativ, so wird die Flüssigkeit von allen Seiten im Zentrum eingesogen, es befindet sich dort ein „Senkpunkt". Die Größe der Geschwindigkeit, genommen in der Richtung vom Zentrum nach außen, ist:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2}, \tag{334}$$

sie ändert sich also umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung und wird im Zentrum selber $= \pm \infty$. Infolgedessen ist nach (322) der Druck p im Zentrum stets $= -\infty$, einerlei ob es sich um eine Quelle oder um eine Senke handelt. Wir haben hier einen beachtenswerten Unterschied gegenüber den stationären galvanischen oder thermischen Strömungen, die von einer punktförmigen Elektrode bzw. von einer punktförmigen Wärmequelle ausgehen und die auch durch die Laplacesche Differentialgleichung dargestellt werden. Dort hängt nämlich die Richtung der Strömung ab vom Potential- bzw. Temperaturgefälle und wechselt mit diesem ihr Vorzeichen, hier nimmt der Druck nach außen stets zu, einerlei ob die Flüssigkeit nach außen oder nach innen strömt. Der Grund für dies abweichende Verhalten liegt in der Trägheit der Flüssigkeit. Denn das Druckgefälle liefert eine hier stets nach innen gerichtete Kraft, welche nötig ist, um im Falle der Quelle die Geschwindigkeit der nach außen strömenden Flüssigkeit allmählich zu verzögern, im Falle der Senke die Geschwindigkeit der nach innen strömenden Flüssigkeit allmählich zu steigern.

Eine jede beliebige vom Zentrum als Spitze ausgehende Kegelfläche kann man durch eine feste Wand ersetzt denken, und erhält so u. a. die Gesetze des Ausflusses durch eine konisch geformte Ansatzröhre, welcher im vorigen Paragraphen zur Sprache kam. Die Konstante μ steht in engem Zusammenhang mit der Ergiebigkeit der Quelle. Denken wir uns durch die Flüssigkeit eine bestimmte Fläche von beliebiger Form gelegt, welche den Quell-

punkt ringsherum einschließt, so ist wegen des stationären Zustandes die im ganzen in der Zeiteinheit durch die Fläche nach außen strömende Flüssigkeitsmenge gleich der in derselben Zeit von der Quelle gelieferten Menge, also ganz unabhängig von der Form der Fläche; wir nennen sie die „Intensität" J oder die „Stärke" der Quelle. Dieselbe berechnet sich am einfachsten, wenn wir der gedachten Fläche die Form einer um den Quellpunkt als Zentrum gelegten Kugel geben. Dann erhalten wir für die Intensität der Quelle nach (325) und (334):

$$J = -k\int\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\sigma = k\frac{\mu}{r^2}\int d\sigma = 4\pi k\mu. \tag{335}$$

Diese Gleichung stellt zugleich eine Verallgemeinerung der Beziehung (324) dar, welche nur dann gilt, wenn der von der Fläche umschlossene Raum keinen singulären Punkt enthält.

Gehen wir nun weiter zur Betrachtung des allgemeinen Falles (332) beliebig vieler Quell- und Senkpunkte, so finden wir dort ganz entsprechende Beziehungen. Die Stromlinien beginnen in den Quellpunkten und endigen entweder in den Senkpunkten oder laufen ins Unendliche. Für die Ergiebigkeit eines einzelnen singulären Punktes ist seine Konstante μ maßgebend, indem sie nach (335) die Intensität J der Quelle bzw. Senke liefert. Denn in der unmittelbaren Umgebung des Punktes ist der Einfluß aller anderen Quellen zu vernachlässigen, und dementsprechend sind die Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials dicht an der Quelle die dieselbe umgebenden konzentrischen Kugelflächen.

Denken wir uns in der Flüssigkeit durch irgendeine geschlossene Fläche einen gewissen Raum abgegrenzt, so ist wegen des stationären Zustandes die im ganzen in der Zeiteinheit durch die Fläche nach außen strömende Flüssigkeitsmenge gleich der algebraischen Summe der in derselben Zeit von den innerhalb des Raumes gelegenen Quell- und Senkpunkten gelieferten Mengen, oder nach (325) und (335):

$$k\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma = \sum J_i = 4\pi k\sum\mu_i,$$

also:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma = 4\pi\sum\mu_i, \tag{336}$$

indem wir mit dem Index i die inneren, von der Fläche σ umschlossenen singulären Punkte bezeichnen, während ν, wie immer,

die innere Normale bedeutet. Diese Beziehung faßt die spezielleren Gleichungen (324) und (335) in ein allgemeineres Gesetz zusammen, sie wird nach ihrem Entdecker oft auch als die Gaußsche Gleichung bezeichnet.

Wir betrachten noch einige spezielle Anwendungen. Für zwei Quellpunkte von der nämlichen Intensität wird das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = \mu\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{337}$$

Da die Ebene, welche die Verbindungslinie der beiden Quellpunkte in ihrer Mitte rechtwinklig schneidet, als Symmetrieebene von lauter Stromlinien gebildet wird, so kann man sie durch eine feste Wand ersetzt denken, und erhält so mittels einer schon im § 47 angestellten Überlegung die Flüssigkeitsströmung aus einem Quellpunkt gegen eine feste Wand.

Besitzen die beiden Quellpunkte entgegengesetzt gleiche Intensität, so wird das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = \mu\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{338}$$

Dann strömt die Flüssigkeit aus der Quelle 2 in die Senke 1, indem die Stromlinien in 2 beginnen und in 1 endigen. Wenn die beiden Zentren einander außerordentlich nahe rücken, so daß etwa 1 die Koordinaten ξ, η, ζ, 2 die Koordinaten $\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta$ besitzt, so geht der Ausdruck (338) über in:

$$\varphi = \mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\Delta\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\Delta\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\Delta\zeta\right).$$

Beim Übergang zur Grenze $\Delta = 0$ kann man μ derartig wachsen lassen, daß die Produkte $\mu\cdot\Delta\xi$, $\mu\cdot\Delta\eta$, $\mu\cdot\Delta\zeta$ endlich bleiben. Bezeichnen wir sie mit $\mu_\xi, \mu_\eta, \mu_\zeta$, so erhalten wir für das Geschwindigkeitspotential den endlichen Ausdruck:

$$\varphi = \mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + \mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}. \tag{339}$$

Ein solches aus zwei unendlich benachbarten Quellpunkten von entgegengesetzt gleicher unendlich großer Intensität bestehendes Gebilde nennt man eine „Doppelquelle". Der konstante Vektor, dessen Komponenten $\mu_\xi, \mu_\eta, \mu_\zeta$ sind, heißt das „Moment", seine Richtung (von der Senke zur Quelle) die „Achse" der Doppelquelle. Die Stromlinien laufen von der Quelle in der Richtung der Achse aus

und kehren in kleinerem oder größerem Bogen zur Senke zurück. Eine Vertauschung von Quelle und Senke ändert nur den Sinn der Strömung, nicht aber die Lage der Stromlinien. Da die Entfernung r des Aufpunktes vom singulären Punkt die Koordinaten der beiden Punkte nur in der Verbindung $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ enthält, so kann man statt (339) auch schreiben:

$$\varphi = -\mu_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \mu_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \tag{340}$$

und erkennt an dieser Form unmittelbar, daß die Funktion φ tatsächlich der Laplaceschen Gleichung (323) genügt.

§ 65. Als weitere Anwendung der entwickelten Theorie wollen wir noch einen Fall behandeln, der sich auf die hier vorausgesetzten Vereinfachungen zurückführen läßt: die gleichförmige Bewegung einer festen Kugel in einer inkompressibeln Flüssigkeit. Nach dem Prinzip der Relativität (I. § 59) sind nämlich die Gesetze dieser Bewegung ganz dieselben wie die einer ruhenden Kugel in einem gleichförmigen Flüssigkeitsstrome, und dieser Fall stellt ja eine stationäre Flüssigkeitsbewegung von der hier betrachteten Art vor. Statt der mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a etwa in der Richtung der z-Achse bewegten Kugel substituieren wir also eine mit dem Zentrum im Koordinatenanfangspunkt ruhende Kugel, welche rings von einem Flüssigkeitsstrom umspült wird. Dieser Strom besitzt an allen Stellen, die von der Kugel so weit entfernt sind, daß dieselbe keinen Einfluß mehr ausübt, also in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt, die konstante Geschwindigkeit $-a$ in der Richtung der z-Achse.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, einen Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential φ aufzustellen, der die Laplacesche Gleichung erfüllt und außerdem den Grenzbedingungen genügt. Die Grenzen der Flüssigkeit sind $r = R$ (Radius der Kugel) und $r = \infty$. Für $r = \infty$ ist nach dem Obigen

$$\varphi = az, \tag{341}$$

und für $r = R$ ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit zur Kugeloberfläche gleich Null, also:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = 0. \tag{342}$$

Um alle diese Bedingungen zu erfüllen, setzen wir:

$$\varphi = az + \varphi', \tag{343}$$

dann muß die Funktion φ' der Laplaceschen Gleichung genügen, und außerdem den Grenzbedingungen:

$$\text{für } r = \infty: \quad \varphi' = 0,$$

$$\text{für } r = R: \quad \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r}\right)_R = -a\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_R = -\frac{az}{R}. \tag{344}$$

Nun läßt sich leicht zeigen, daß man die Lösung dieser letzten Aufgabe erhält, wenn man φ' gleich der Potentialfunktion einer Doppelquelle setzt, also:

$$\varphi' = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \tag{345}$$

Denn erstens genügt φ' der Laplaceschen Gleichung, zweitens verschwindet φ' für $r = \infty$, und drittens ergibt sich aus (344) für μ der konstante Wert:

$$\mu = -\frac{1}{2} R^3 a. \tag{346}$$

Wenn in den Gleichungen (344) und (345) die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial r}$ und $\frac{\partial r}{\partial z}$ gleiche Werte besitzen, nämlich beide den Wert $\frac{z}{r}$, so darf man darin keinen Widerspruch erblicken. Ein solcher würde nur einem mangelhaften Verständnis der Bedeutung jener Symbole entspringen. Er wird auch formell vermieden, wenn man ausführlicher schreibt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{\vartheta, \varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{x, y}, \tag{347}$$

d. h. auf der linken Seite der Gleichung ist z als Funktion der Polarkoordinaten r, ϑ, φ, auf der rechten dagegen ist r als Funktion der geradlinigen Koordinaten x, y, z zu denken.

Durch Berücksichtigung von (345) und (346) erhält man als Lösung der ganzen Aufgabe den gesuchten Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials aus (343):

$$\varphi = az\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}. \tag{348}$$

Da φ nur von z und r abhängt, so ist die Strömung symmetrisch zur z-Achse, und die Stromlinien verlaufen in den durch die z-Achse gehenden Ebenen, wie natürlich.

Die Geschwindigkeitskomponenten sind nach (348):

$$(349)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{3}{2} R^3 a \cdot \dfrac{xz}{r^5} \\ v = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{3}{2} R^3 a \cdot \dfrac{yz}{r^5} \\ w = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -a \left\{ 1 + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{R}{r}\right)^3 \left(1 - \dfrac{3z^2}{r^2}\right) \right\}. \end{cases}$$

Um die Stromlinien zu finden, die in irgendeiner durch die z-Achse gehenden Ebene verlaufen, führen wir statt x und y die Entfernung ϱ von der z-Achse ein:

$$(350)\quad \varrho^2 = x^2 + y^2,$$

also

$$(351)\quad r^2 = \varrho^2 + z^2.$$

Dann lautet die Differentialgleichung der Stromlinien:

$$d\varrho : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und nach (349):

$$d\varrho : dz = \frac{3}{2} R^3 a \cdot \frac{\varrho z}{r^5} : -a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) \right\}.$$

Wenn wir hier z durch r und ϱ ersetzen, vermittelst der Beziehungen:

$$z^2 = r^2 - \varrho^2 \qquad \text{und} \qquad z\,dz = r\,dr - \varrho\,d\varrho,$$

so ergibt sich nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{3R^3\,dr}{r^4 \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right\}} + \frac{2\,d\varrho}{\varrho} = 0$$

und daraus durch Integration:

$$\log \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right\} + 2 \log \varrho = \text{const.}$$

oder:

$$(352)\quad \varrho^2 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right\} = \text{const.}\ (> 0)$$

als Gleichung für das Stromliniensystem. Dasselbe ist vom Kugelradius R, aber nicht von der Größe der Geschwindigkeit a abhängig. Läßt man die const. alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen, so erhält man sämtliche Stromlinien. Für const. $= \infty$ wird $\varrho = \infty$ und damit auch $r = \infty$, und die Geschwindigkeit gleichförmig $= -a$. Für const. $= 0$ aber wird entweder $\varrho = 0$ oder $r = R$, d. h. die Stromlinie zerfällt in zwei verschiedene Teile, von denen

der eine mit der z-Achse (außerhalb der Kugel) zusammenfällt, der andere in der Kugelfläche verläuft. In den Übergangspunkten $\varrho = 0$, $z = \pm R$, den „Polen" der Kugel, erleidet die Stromlinie einen rechtwinkligen Knick; hier wird die Geschwindigkeit $= 0$, und die Stromlinie spaltet sich in unendlich viele Äste, welche die Kugel unmittelbar umschließen.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, wieviel Zeit ein auf der positiven z-Achse befindlicher Flüssigkeitspunkt braucht, um zum Pol $z = +R$ der Kugel zu gelangen. Da für die Bewegung dieses Punktes $x = 0$, $y = 0$, $r = z$, so ergibt sich für die fragliche Zeit aus (349):

$$t = \int_{z}^{R} \frac{dz}{w} = \frac{1}{a} \int_{R}^{z} \frac{z^3 dz}{z^3 - R^3} = \infty , \tag{353}$$

d. h. die Zeit, die ein Flüssigkeitsteilchen braucht, um an der Kugel vorbeizugelangen, wächst unbegrenzt, je näher seine Bahn an der Kugeloberfläche liegt.

Die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit dicht an der Kugelfläche vorbeiströmt, ergibt sich aus (349), wenn man darin $r = R$ setzt; sie beträgt

$$\frac{3}{2} \frac{\varrho}{R} \cdot a ; \tag{354}$$

ihren größten Wert: $\frac{3}{2} a$, erreicht sie in der Äquatorialebene der Kugel. Im übrigen ist sie auf den beiden durch diese Ebene getrennten Kugelhälften vollkommen symmetrisch angeordnet.

Endlich wollen wir noch nach dem Druck fragen, welcher von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübt wird, namentlich weil sich aus ihm auch die resultierende Kraft berechnet, mit welcher ein Flüssigkeitsstrom auf eine ruhende Kugel wirkt, bzw. der Widerstand, den eine bewegte Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit erfährt.

Für den Druck p auf die Kugel ergibt sich aus (322), wenn wir die Schwere vernachlässigen und für die Größe der Geschwindigkeit den Wert (354) einsetzen:

$$p = \text{const.} - \frac{9}{8} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 a^2 k ,$$

oder, wenn wir den Druck im ungestörten Flüssigkeitsstrome, also für die Geschwindigkeit a, mit p_0 bezeichnen:

$$p = p_0 + \frac{a^2}{2} k \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} \frac{\varrho}{R}\right)^2 \right\} . \tag{355}$$

Er ist unabhängig von der Richtung der Strömung, am größten an den Polen der Kugel, am kleinsten an der Äquatorialebene, und symmetrisch zu beiden Seiten derselben. Setzen wir nun die auf alle Flächenelemente der Kugel wirkenden Druckkräfte $p \cdot d\sigma$ zu einer Resultierenden zusammen, so erkennt man ohne besondere Rechnung aus der Symmetrie dieser Kräfte für positive und negative z, daß die Resultierende verschwindet. Mit andern Worten: Ein Flüssigkeitsstrom übt gar keine Wirkung auf eine in ihm ruhende starre Kugel aus, oder eine gleichförmig bewegte Kugel erfährt in einer ruhenden Flüssigkeit keinen Widerstand.

Dieses Resultat steht zu allen Erfahrungen in klaffendem Gegensatz und bildet daher von jeher ein berühmtes Paradoxon der Hydrodynamik. Es findet seine Erklärung in dem Umstand, daß in den hier benutzten Gleichungen ein für die vorliegende Frage wesentliches Glied nicht berücksichtigt ist, nämlich der Einfluß der Reibung, und zwar namentlich derjenigen Reibung, die sich an der Berührungsfläche der beiden Substanzen geltend macht. Dieselbe bewirkt nämlich, daß in Wirklichkeit an der Oberfläche der Kugel nicht nur die Normalkomponente, sondern auch die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit Null ist, daß also die Flüssigkeit an der Kugeloberfläche vollkommen fest haftet. Wir werden diesen Fall später (§ 80) noch weiter verfolgen.

§ 66. Wir gehen jetzt über zur Untersuchung einer weiteren Klasse von partikulären Lösungen der Laplaceschen Gleichung für das Geschwindigkeitspotential φ, nämlich derjenigen, bei welcher die Funktion φ nur von den beiden Koordinaten x und y, nicht aber von z abhängt, so daß:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{356}$$

Dann reduziert sich das Problem auf ein zweidimensionales, in vieler Hinsicht einfacheres. Die Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const.}$ sind dann Zylinderflächen, parallel der z-Achse, und können durch Linien in der xy-Ebene, die Äquipotentiallinien, dargestellt werden. Das System der Stromlinien wird dann durch die zu diesen orthogonalen Linien in derselben Ebene dargestellt.

Eine sehr allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichung (356) beruht auf der Einführung komplexer Größen. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß eine jede analytische Funktion der Komplexen $x + iy = z$ Anlaß gibt zu einer Lösung der Gleichung (356) und daher sich physikalisch deuten läßt als eine

wirbelfreie stationäre Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit. Bezeichne w eine solche Funktion, also:

$$w = f(x + iy) = f(z), \tag{357}$$

wobei der Funktionsausdruck f beliebige reelle oder komplexe Konstante enthalten mag.

Wenn wir dann w in den reellen und imaginären Teil zerlegen:

$$w = \varphi + i\psi, \tag{358}$$

so sind φ und ψ gewisse reelle Funktionen der reellen Variabeln x und y. Nun folgt aus (358):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{359}$$

Andererseits aus (357):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}, \tag{359a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} i,$$

daher:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

und nach (359), durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{360}$$

Die Elimination von ψ ergibt die Gleichung (356), diejenige von φ die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{361}$$

Außerdem gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{362}$$

Man kann also φ als Geschwindigkeitspotential deuten. Dann sind die Kurven $\varphi = \text{const.}$ die Äquipotentiallinien, und die dazu gehörigen Stromlinien werden durch $\psi = \text{const.}$ dargestellt, weil nach (362) die beiden Kurvenscharen aufeinander senkrecht stehen. Es können aber die Funktionen φ und ψ auch ihre Rollen vertauschen und die letztere als Geschwindigkeitspotential, die erstere als Stromfunktion gedeutet werden.

Die Art der Abhängigkeit der komplexen Funktion w von z läßt sich am besten veranschaulichen, wenn man w und z auffaßt als diejenigen Punkte zweier Ebenen, der w-Ebene und der z-Ebene, welche durch die Koordinaten φ und ψ bzw. x und y charakterisiert

werden. Dann stellt die Funktion $f(z) = w$ eine bestimmte Zuordnung der beiden Punkte, also eine Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene, oder umgekehrt, dar. Man kann die Abbildung auch auffassen als eine Deformation einer auf einer ebenen Fläche stetig ausgebreiteten Substanz, indem φ und ψ die Koordinaten eines substanziellen Punktes vor der Deformation, x und y die Koordinaten des nämlichen Punktes nach der Deformation, oder umgekehrt, bedeuten. Dann lassen sich in bezug auf die Eigentümlichkeiten dieser Deformation ganz dieselben Betrachtungen anstellen wie früher im ersten Kapitel für den allgemeineren Fall einer räumlich ausgedehnten Substanz. Wir wollen hier die wichtigsten Resultate besprechen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß unendlich kleine Flächenstücke sich linear abbilden und daher durch Translation, Rotation und Dilatation ineinander übergeführt werden können (§ 11). Aus (357) folgt nämlich:

$$dz = \frac{dx}{dw} \cdot dw. \tag{363}$$

Nun setzen wir:

$$\frac{dx}{dw} = \zeta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \tag{364}$$

wobei:

$$r > 0 \quad \text{und} \quad \pi > \vartheta > -\pi.$$

Dann folgt aus (363) durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$dx = r\cos\vartheta \cdot d\varphi - r\sin\vartheta \cdot d\psi,$$
$$dy = r\sin\vartheta \cdot d\varphi + r\cos\vartheta \cdot d\psi.$$

Halten wir nun die einander entsprechenden Punkte w und z, also auch die Werte von r und ϑ fest und betrachten nur die Differentiale $d\varphi$, $d\psi$, dx, dy als variable Koordinaten, so ergeben die letzten beiden Gleichungen die Gesetze der Abbildung für die den Punkten w und z unendlich benachbarten Gebiete; dieselben werden also durch lineare Beziehungen ausgedrückt. Ihre geometrische Bedeutung erkennt man unmittelbar, wenn man schreibt:

$$\begin{cases} \frac{dx}{r} = \cos\vartheta \cdot d\varphi - \sin\vartheta \cdot d\psi = dx', \\ \frac{dy}{r} = \sin\vartheta \cdot d\varphi + \cos\vartheta \cdot d\psi = dy', \end{cases} \tag{365}$$

das heißt: um einen unendlich benachbarten Punkt aus der Lage $(d\varphi, d\psi)$ in die Lage (dx, dy) überzuführen, hat man erstens eine

einfache Drehung auszuführen, um den Winkel ϑ, wodurch der Punkt in die Lage (dx', dy') kommt, und zweitens eine nach allen Richtungen gleichmäßige Dilatation (§ 7 am Schluß) im Verhältnis $r:1$, wodurch sämtliche Strecken in diesem Verhältnis vergrößert werden, während alle Richtungen, also auch alle Winkel, unverändert bleiben. Das veränderte Gebiet ist mithin dem ursprünglichen ähnlich und nur gegen dasselbe gedreht. Daher bezeichnet man auch die Abbildung mittels einer komplexen Funktion als in den kleinsten Teilen „konform".

Jeder konformen Abbildung der w-Ebene auf die z-Ebene entspricht also eine stationäre Flüssigkeitsbewegung in der z-Ebene. Dabei bildet jeder Stromfaden, da er von zwei Linien $\psi = \text{const.}$ begrenzt wird, in der w-Ebene einen zur φ-Achse parallelen Streifen. Die Aufgabe, die stationäre Flüssigkeitsströmung zwischen irgend zwei gegebenen festen Grenzlinien (Wänden) zu finden, läuft daher darauf hinaus, einen von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifen in der w-Ebene konform abzubilden auf das zwischen diesen beiden Grenzlinien befindliche Gebiet in der z-Ebene.

Die charakteristischen Merkmale dieser Abbildung, die Größen r und ϑ, besitzen für die Art der Flüssigkeitsbewegung eine anschauliche Bedeutung. Denn da mit Rücksicht auf (359a) und (360):

$$\zeta = 1 : \frac{dw}{dz} = 1 : \frac{\partial w}{\partial x} = 1 : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

so ergibt sich nach (364) durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2, \tag{366}$$

$$\cos\vartheta = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sin\vartheta = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{367}$$

r ist also der reziproke Wert der Geschwindigkeit, und ϑ (zwischen π und $-\pi$) ist der Winkel, welchen der Gradient des Geschwindigkeitspotentials (der Stromlinie entgegengesetzt) mit der positiven x-Achse bildet.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Strömung einer Flüssigkeit in dem Zwischenraum zwischen zwei festen Geraden, die in einem Senkpunkt O unter dem Winkel α zusammenstoßen (Ausfluß aus einer unendlich kleinen Öffnung in O). Hierfür ist es notwendig, einen der φ-Achse parallelen Streifen von einer gewissen Breite β in der w-Ebene konform abzubilden auf den

Sektorausschnitt vom Winkel α in der z-Ebene (Fig. 12). Diese Abbildung wird dargestellt durch die Funktion:

$$z = e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot w} \tag{368}$$

oder:

$$\begin{cases} x = e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \varphi} \cos\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right), \\ y = e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \varphi} \sin\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right). \end{cases} \tag{369}$$

In der Tat: Läßt man φ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen, entsprechend der Richtung der Stromlinien (in der Fig. 12 durch Pfeile angedeutet), so durchläuft der Punkt z für $\psi = 0$ die eine feste Gerade, die x-Achse, von $x = \infty$ bis $x = 0$, für $\psi = \beta$ aber die andere feste Gerade, von unendlicher Entfernung bis O, und für einen dazwischen liegenden konstanten Wert von ψ eine dazwischen liegende Gerade von unendlicher Entfernung bis O. Die Stromlinien in der z-Ebene sind also die Geraden, welche innerhalb des Winkels α in O zusammenstoßen. Drückt man φ und ψ durch x und y aus, so ergibt sich aus (369):

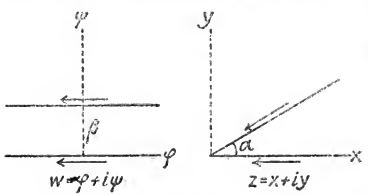

Fig. 12.

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\beta}{\alpha} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \log \varrho_0, \\ \psi = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases} \tag{370}$$

Wir haben hier also das logarithmische Potential als partikuläre Lösung der Differentialgleichung (356) (vgl. I. § 46). Die Konstante β entspricht offenbar der Stärke der Strömung.

Für die Größen r und ϑ ergibt sich aus (366) und (367):

$$r = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{371}$$

übereinstimmend damit, daß r die reziproke Geschwindigkeit und ϑ die der Stromlinie entgegengesetzte Richtung bezeichnet.

§ 67. Die Methode der konformen Abbildung gestattet es auch, ein Problem zu bewältigen, welches unter allgemeineren Be-

dingungen nicht lösbar ist, nämlich die Darstellung von Flüssigkeitsbewegungen, die „freien Strahlen“ entsprechen: das sind Flüssigkeitsströme, die nicht zwischen gegebenen festen Wänden verlaufen, sondern in freier Luft. Hier ist die Aufgabe deshalb viel schwieriger, weil die Grenzen des Flüssigkeitsgebiets nicht von vorneherein gegeben sind, sondern erst berechnet werden müssen, und zwar mittels der für einen freien Strahl charakteristischen Oberflächenbedingungen. Die Grenzbedingung, welche an der Oberfläche eines freien Strahles gilt, beschränkt sich nämlich nicht allein auf die Bedingung, daß diese Fläche von Stromlinien gebildet wird, sondern sie verlangt außerdem noch, wegen des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, daß an der Oberfläche des freien Strahles der Druck p der Flüssigkeit gleich ist dem Druck p_0 der freien Luft, also konstant.

Vernachlässigen wir den Einfluß der Schwere, so folgt aus (322), daß an der Oberfläche eines freien Strahles die Größe der Strömungsgeschwindigkeit konstant ist. Umgekehrt kann jede Stromlinie, in welcher die Geschwindigkeit konstant ist, die Grenze eines freien Strahles darstellen. Wenn auf einem Teil der Stromlinie die Geschwindigkeit wechselt, während sie auf einem andern Teil konstant bleibt, so stellt der erste Teil die Strömung längs einer festen Wand, der zweite Teil die Fortsetzung dieser Strömung als freien Strahl dar, wie das z. B. beim Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer beliebig geformten Röhre in die freie Luft sich verwirklicht findet.

Zur Darstellung eines freien Strahles in dem hier behandelten speziellen Falle zweidimensionaler Strömungen ist es also notwendig, solche Stromlinien zu finden, für welche nicht nur ψ, sondern auch die Geschwindigkeit $\frac{1}{r}$ konstant ist, und diese Aufgabe läßt sich lösen, wenn man bedenkt, daß die Linien $\psi = \text{const.}$, wie schon oben bemerkt, in der w-Ebene die der φ-Achse parallelen Geraden bezeichnen, die Linien $r = \text{const.}$ aber nach (364) in der ζ-Ebene die um den Anfangspunkt als Mittelpunkt herumgelegten konzentrischen Kreisbögen. Wenn es also gelingt, einen von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifen in der w-Ebene konform abzubilden auf ein teilweise von einem Kreisbogen $r = \text{const.}$ begrenztes Gebiet in der ζ-Ebene, so ergibt sich aus der funktionalen Beziehung zwischen w und $\zeta = \frac{dz}{dw}$ eine bestimmte funktionale Beziehung zwischen z und w, d. h. eine Abbildung des

Streifens in der w-Ebene auf die z-Ebene, welche die Eigentümlichkeit besitzt, daß auf gewissen Grenzlinien des Gebietes der z-Ebene sowohl $\psi = \text{const.}$, als auch $r = \text{const.}$ Diese Linien stellen die Oberflächen freier Strahlen der Flüssigkeitsbewegung dar. Nach der geschilderten Methode ist es zuerst Helmholtz gelungen, exakte Lösungen für das Problem der Bildung freier Strahlen aufzufinden[1]).

§ 68. Wir wollen nunmehr zur Betrachtung des allgemeinen Falles einer wirbelfreien Flüssigkeitsströmung zurückkehren, um eine Frage näher zu beleuchten, die wir im § 61 nur kurz berührt haben: die Frage, ob eine Stromlinie in sich selber zurücklaufen kann. Dort fanden wir, daß dies unmöglich ist, falls das Geschwindigkeitspotential eine eindeutige und stetige Funktion der Raumkoordinaten ist. Aber es läßt sich leicht zeigen, daß es in der Tat wirbellose Strömungen mit in sich geschlossenen Stromlinien gibt. Gehen wir z. B. aus von der einfachen, durch (370) dargestellten Flüssigkeitsbewegung, und bedenken wir, daß, wie schon früher hervorgehoben, die Funktionen φ und ψ ihre Rollen auch vertauschen können, so erhalten wir die Flüssigkeitsbewegung:

$$(372)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\beta}{\alpha}\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,, \\ \psi = \dfrac{\beta}{\alpha}\log\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{\beta}{\alpha}\log\varrho_0\,. \end{cases}$$

Hier haben wir eine wirbelfreie stationäre Strömung einer die ganze xy-Ebene, mit Ausnahme eines beliebig kleinen den singulären Punkt O enthaltenden Gebiets, ausfüllenden Flüssigkeit, bei der die Stromlinien $\psi = \text{const.}$ konzentrische Kreise mit dem singulären Punkt O als Mittelpunkt, und die Äquipotentiallinien die von O ausgehenden Geraden sind. Betrachtet man irgend zwei dieser konzentrischen Kreise als feste Wände, so hat man eine Strömung in einer kreisförmigen Ringfläche. Die Geschwindigkeitskomponenten sind dabei:

$$(373)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{y}{\varrho_0^2}\,, \\ v = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{x}{\varrho_0^2}\,, \end{cases}$$

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig (J. A. Barth) I, S. 146, 1882.

und die Größe der Geschwindigkeit:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varrho_0}. \tag{374}$$

Während also die Rotationsgeschwindigkeit überall dauernd gleich Null ist, zirkuliert die Flüssigkeit doch fortwährend im Kreise herum. Dieser Satz verliert das scheinbar Paradoxe seines Inhalts, wenn man bedenkt, daß die Flüssigkeit sich nicht wie ein starrer Körper dreht, sondern daß sie bei ihrer Bewegung Deformationen erleidet, weil die Winkelgeschwindigkeit der Zirkulation mit der Entfernung von der Drehungsachse immer kleiner wird. Die Winkelgeschwindigkeit der Zirkulation ist also wohl zu unterscheiden von der Winkelgeschwindigkeit der Rotation; denn die erstere ist bedingt durch den Krümmungsradius der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens, die letztere aber durch die davon ganz unabhängige Drehung des Teilchens. Übrigens darf man aber auch nicht glauben, daß, da die Rotationsgeschwindigkeit Null ist, ein Flüssigkeitsteilchen sich immer parallel bleibt. Denn die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit eines Teilchens sind nicht etwa zeitliche Differentialquotienten von Winkeln, welche die Orientierung des Teilchens bestimmen. Wären sie es, dann müßte man allerdings aus dem Verschwinden der Rotationsgeschwindigkeit auf die Konstanz jener Winkel schließen. Tatsächlich aber folgt aus dem Verschwinden der Rotationsgeschwindigkeit nur, daß diejenigen Geraden, welche gerade die Hauptdilatationsachsen des Teilchens darstellen, keine Richtungsänderung erleiden, während alle andern Geraden im Teilchen sich sehr wohl drehen können (§ 7); und da in jedem Augenblick die Hauptdilatationsachsen wechseln, so kommt es, daß nach einer endlichen Zeit das Teilchen eine endliche Drehung ausgeführt haben kann, während doch in jedem Augenblick die Drehungsgeschwindigkeit gleich Null ist.

Dem einfachen, durch (372) dargestellten Beispiel lassen sich natürlich leicht noch andere, allgemeinere Fälle von wirbelfreien Flüssigkeitsbewegungen mit geschlossenen Stromlinien an die Seite stellen, in der Ebene wie im Raume, so z. B. die Strömung in irgendeiner in sich zurücklaufenden Röhre.

In allen solchen Fällen wird man schließen müssen, daß das Geschwindigkeitspotential nicht eindeutig und stetig sein kann. In der Tat findet man dies an dem Ausdruck von φ in (272) bestätigt. Entweder nimmt man den arctg eindeutig; dann ist er nicht stetig, sondern erleidet an irgendeiner, beliebig wählbaren, Stelle einen

plötzlichen Sprung. Oder man nimmt ihn stetig; dann ist er unendlich vieldeutig. Hat man mit einer derartigen Funktion Rechnungen auszuführen, so empfiehlt es sich meistens, die erstere Wahl zu treffen und eine bestimmte Unstetigkeitsstelle festzusetzen, damit das Resultat der Rechnung ein ganz bestimmtes wird. Auf die Größe und die Richtung der Geschwindigkeit hat natürlich die Vieldeutigkeit bzw. Unstetigkeit des Geschwindigkeitspotentials keinerlei Einfluß.

§ 69. Da mithin der Charakter einer wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung wesentlich davon abhängt, ob das Geschwindigkeitspotential eindeutig und stetig ist oder nicht, so erhebt sich nun die Frage, ob sich nicht ein allgemeines Kriterium aufstellen läßt, das von vorneherein zu entscheiden gestattet, ob bei einer bestimmten Flüssigkeitsbewegung das Geschwindigkeitspotential notwendig eindeutig und stetig ist. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst auf die mathematische Bedeutung der Gleichungen (318), welche die Wirbelfreiheit ausdrücken, näher eingehen. Es sei $\mathfrak{q}$ ein Vektor, dessen Komponenten u, v, w innerhalb eines gewissen Raumes R als eindeutige und stetige Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z derart gegeben sind, daß die drei Gleichungen (318) erfüllt werden. Dann gilt folgender Satz. Bildet man das Integral:

$$J = \int_1^2 \mathfrak{q}_s \cdot ds \tag{375}$$

von irgendeinem bestimmten Punkt 1 des Raumes R bis zu irgendeinem andern bestimmten Punkt 2 desselben Raumes, über eine beliebige Kurve s, die ganz innerhalb von R verläuft, so behält das Integral seinen Wert bei jeder beliebigen unendlich kleinen Änderung des Integrationsweges s. Der Beweis für diesen Satz ergibt sich folgendermaßen. Aus:

$$\mathfrak{q}_s = u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}$$

folgt:

$$J = \int_1^2 (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{376}$$

Also für eine unendlich kleine Variation der Kurve s:

$$\delta J = \int_1^2 (u \cdot \delta dx + \delta u \cdot dx + \cdots). \tag{377}$$

Da nun $\delta dx = d\delta x$, so ergibt sich mittels partieller Integration, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Grenzpunkte des Integrals unvariiert bleiben:

$$\int_1^2 u \cdot \delta dx = -\int_1^2 du \cdot \delta x$$

$$= -\int_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right) \cdot \delta x.$$

Ferner ist

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z.$$

Folglich, durch Substitution dieser und analoger Umformungen in (377):

$$\delta J = \int_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot (\delta y\, dz - \delta z\, dy) + \cdots \tag{378}$$

und nach (318):

$$\delta J = 0, \tag{379}$$

wie zu beweisen war.

Wenn mithin der Wert von J invariant ist gegenüber einer unendlich kleinen Änderung des Integrationsweges, so folgt daraus noch nicht, daß J für alle möglichen Integrationswege denselben Wert besitzt. Denn dieser Schluß ist offenbar nur dann gestattet, wenn aus einem einzigen Integrationsweg durch sukzessive unendlich kleine, d. h. stetige Änderung alle übrigen Integrationswege abgeleitet werden können. Ob dies der Fall ist oder nicht, hängt aber von der Beschaffenheit des Raumes R ab, innerhalb dessen der Vektor $\mathfrak{q}$ definiert ist. Besitzt z. B. R die Form eines Parallelepipeds oder eines Ellipsoids, so sind alle Kurven, die zwischen zwei bestimmten Punkten innerhalb R verlaufen, durch stetige Änderungen ineinander überführbar. Ein solcher Raum heißt einfach zusammenhängend. In ihm ist daher das Integral J gänzlich unabhängig vom Integrationswege und durch die beiden Grenzpunkte vollkommen bestimmt, mithin das Geschwindigkeitspotential, das ja durch J dargestellt wird, eindeutig bis auf die durch die untere Grenze bedingte additive Konstante.

Wenn aber z. B. R eine ringförmige Form hat, wie eine in sich geschlossene Röhre, so ist es nicht möglich, eine Kurve, welche zwei Punkte der Röhre miteinander verbindet, durch stetige Än-

derungen in eine andere Kurve überzuführen, welche die Verbindung zwischen den beiden Punkten dadurch herstellt, daß sie die Röhre in umgekehrtem Sinne durchläuft. Ein solcher Raum, in dem nicht alle Verbindungslinien zwischen zwei Punkten stetig ineinander übergeführt werden können, heißt mehrfach zusammenhängend. In ihm zerfallen die Verbindungslinien zwischen zwei bestimmten Punkten in eine Anzahl Gruppen, für deren jede das Integral J einen verschiedenen Wert besitzen kann.

Man kann den dargelegten Gegensatz zwischen einfach und mehrfach zusammenhängenden Räumen noch in einer etwas anderen Art formulieren, die gewisse Vorzüge bietet. Offenbar lassen sich zwei verschiedene Verbindungslinien zwischen zwei Punkten stets kombinieren zu einem einzigen in sich geschlossenen Umlauf, indem die eine Linie als Hinweg, die andere als Rückweg benutzt wird. Je nachdem nun die beiden Linien durch stetige Änderungen ineinander übergeführt werden können oder nicht, läßt sich der geschlossene Umlauf durch stetige Einengung auf einen einzigen Punkt zusammenziehen oder nicht. Daher gilt der Satz: Ein Raum ist einfach zusammenhängend oder mehrfach zusammenhängend, je nachdem alle in ihm verlaufenden geschlossenen Linien sich durch stetige Einengung auf einen einzigen Punkt zusammenziehen lassen oder nicht. In einem Parallelepiped oder Ellipsoid trifft das erstere zu, in einer ringförmigen Röhre aber nicht, weil eine geschlossene Linie, welche die Röhre in einem bestimmten Sinne durchläuft, bei fortgesetzter Einengung gegen die Wand stößt, die einer weiteren Einengung ein Hindernis entgegensetzt.

Um nun diese Betrachtungsweise auf den uns hier interessierenden Fall anzuwenden, bedenken wir, daß die Frage, ob das Integral J in (375) für zwei verschiedene Integrationswege den nämlichen Wert besitzt, zusammenfällt mit der Frage, ob dies Integral für den aus beiden Wegen zusammengesetzten geschlossenen Umlauf gleich Null ist. Denn das geschlossene Integral ist ja die algebraische Summe der beiden Einzelintegrale, eins davon in umgekehrter Richtung genommen. Nach dem durch (379) ausgedrückten Satze behält nun das geschlossene Integral seinen Wert bei jeder beliebigen stetigen Einengung des Integrationsweges, wobei auch die Punkte 1 und 2 verschoben werden dürfen. Läßt sich also, wie stets in einem einfach zusammenhängenden Raume, die Einengung bis in einen einzigen Punkt fortsetzen, so wird schließlich die Länge des Integrationswegs und mit ihr der Wert

des Integrals verschwindend klein, mithin das Integral auch bei beliebiger Erweiterung des Integrationswegs gleich Null, und alle verschiedenen Werte von J zwischen zwei bestimmten Punkten einander gleich: das Geschwindigkeitspotential ist eindeutig.

Findet jedoch, in einem mehrfach zusammenhängenden Raume, die Einengung des geschlossenen Integrationsweges eine Schranke, so kann das Integral über eine solche geschlossene Kurve einen von Null verschiedenen Wert besitzen, der aber dann der nämliche ist für alle anderen daraus durch stetige Änderung abzuleitenden geschlossenen Kurven: das Geschwindigkeitspotential ist vieldeutig, es besitzt eine diskrete Anzahl von Werten.

§ 70. Um das Unbequeme der Vieldeutigkeit einer Größe zu vermeiden, kann man durch eine zweckmäßige, willkürlich festgesetzte Beschränkung einen mehrfach zusammenhängenden Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandeln, nämlich dadurch, daß man an gewissen Stellen des Raumes Trennungsquerschnitte legt mit der Festsetzung, daß die Verbindungslinie zweier Punkte des Raumes durch keinen Trennungsschnitt hindurchgehen darf. Dann wird offenbar die Anzahl der verschiedenen möglichen Arten von stetig ineinander überführbaren Verbindungslinien zwischen zwei Punkten eine kleinere, und durch Einführung hinreichend vieler Trennungsschnitte kann man es dahin bringen, daß nur eine einzige Art übrigbleibt und somit der Raum ein einfach zusammenhängender wird. Wenn ein einziger Trennungsquerschnitt genügt, um dies Resultat zu erzielen, wie bei einer in sich zurücklaufenden Röhre, so heißt der Raum zweifach zusammenhängend; sind n Trennungsschnitte nötig, so heißt der Raum $(n+1)$fach zusammenhängend.

Ein Beispiel für einen mehr als zweifach zusammenhängenden Raum gibt ein Rad mit mehreren Speichen. Hat das Rad vier Speichen, so sind vier Trennungsschnitte nötig, die man sich alle auf dem Radkranz, zwischen je zwei Speichen, angebracht denken kann. Daher ist dieser Raum fünffach zusammenhängend.

Denkt man sich in der beschriebenen Weise die nötige Zahl von Trennungsschnitten gelegt, so ist der Raum einfach zusammenhängend, alle in ihm gezogenen geschlossenen Kurven lassen sich durch stetige Einengung auf einen Punkt zusammenziehen, und das Geschwindigkeitspotential ist eindeutig. Aber der Gewinn der Eindeutigkeit wird erkauft durch den Verlust der Stetigkeit. Denn wenn man nach der Differenz der Werte des Geschwindigkeitspotentials in zwei Punkten 1 und 2 fragt, die einander unendlich

naheliegen, aber auf verschiedenen Seiten eines Trennungsschnitts, so hat man die zur Berechnung dieser Differenz dienende Integration in (375) nicht auf dem unendlich kurzen, sondern auf dem einzigen hierfür gestatteten endlichen Verbindungsweg auszuführen, und da dieser für das Integral einen endlichen Wert ergeben wird, so ist die gesuchte Differenz endlich: das Geschwindigkeitspotential erleidet an der Trennungsfläche einen Sprung. Da aber der zu dieser Berechnung benutzte Integrationsweg eine geschlossene Kurve darstellt, und da der Wert des Integrals sich nach (379) bei einer ganz beliebigen stetigen Änderung dieser Kurve nicht ändert, so erhalten wir den Satz: Der Sprung des Geschwindigkeitspotentials an einer Unstetigkeitsfläche ist an allen verschiedenen Punkten dieser Fläche der nämliche, und gleich dem Wert des Integrals (375) für irgendeine geschlossene, durch die Unstetigkeitsfläche hindurchführende Linie.

Alle diese Sätze finden eine anschauliche Illustration an dem einfachen, im § 68 besprochenen Fall der Zirkulation einer Flüssigkeit in einem ebenen Kreisring. Hier sind die Stromlinien geschlossen, das Geschwindigkeitspotential vieldeutig, der Raum zweifach zusammenhängend. In der Tat läßt sich eine geschlossene Stromlinie nicht auf einen einzigen Punkt zusammenziehen, weil das kleine den singulären Punkt enthaltende, nicht mit zum Flüssigkeitsraum gehörende Gebiet der unbeschränkten Einengung ein Hindernis bietet. Denkt man sich aber durch die Flüssigkeit einen Trennungsquerschnitt gelegt, vom singulären Gebiet ins Unendliche, oder, im Falle des Vorhandenseins zweier konzentrisch kreisförmiger fester Wände, von einer Wand zur andern, so ist der Flüssigkeitsraum einfach zusammenhängend und das Geschwindigkeitspotential eindeutig, aber unstetig. Der Sprung an der Unstetigkeitsfläche ist in allen Punkten dieser Fläche der nämliche und ergibt sich leicht durch Berechnung von (375) für eine geschlossene Stromlinie, also nach (374):

$$\int q \cdot ds = \frac{\beta}{\alpha} \cdot 2\pi ,$$

übereinstimmend mit dem Sprunge 2π des arctg in dem Ausdruck (372) des Geschwindigkeitspotentials φ.

§ 71. Da eine Stromlinie in einem einfach zusammenhängenden Raume nicht in sich zurücklaufen kann, da sie ferner nicht an einer festen Wand endigen kann, so ist zu schließen, daß in einem

einfach zusammenhängenden Raume, der allseitig von festen Wänden begrenzt ist, eine wirbelfreie Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit überhaupt unmöglich ist. Dies läßt sich in der Tat leicht direkt beweisen durch die Betrachtung der identischen Gleichung (81). Denn wegen der festen Wände ist das Oberflächenintegral, wegen der Inkompressibilität ist das Raumintegral der rechten Gleichungsseite gleich Null, und daher φ durchweg konstant, d. h. die Flüssigkeit befindet sich in Ruhe. Für die Gültigkeit von (81) ist aber die Eindeutigkeit und Stetigkeit des Geschwindigkeitspotentials notwendig. Denn sonst würde das Integral

$$\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx$$

nicht, wie in (76) benutzt wurde, den Wert $\varphi_2 - \varphi_1$ besitzen.

§ 72. Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir uns noch mit einem einfachen Beispiel einer nichtstationären wirbelfreien Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit beschäftigen. Wir knüpfen hierzu an den im § 63 behandelten Fall des Ausflusses einer schweren Flüssigkeit aus einem oben weiten, unten engen Rohr an, indem wir wieder annehmen, daß das obere Niveau der Flüssigkeit unter dem konstanten Druck p_0, die Ausflußöffnung unter dem konstanten Druck p gehalten wird. Doch betrachten wir jetzt nicht den stationären Ausfluß, sondern fragen nach der Bewegung, welche eintritt, wenn zur Zeit $t = 0$ die Flüssigkeit überall ruht.

Was zunächst die Differentialgleichungen der Bewegung betrifft, so gilt die Laplacesche Gleichung (323) und die durch sie bedingten Beziehungen (324) bis (329) auch bei nichtstationären Bewegungen; denn sie folgt aus der allgemeinen Kontinuitätsbedingung (259) in Verbindung mit der Inkompressibilitätsbedingung. Dagegen verallgemeinert sich (322) gemäß (321) zu:

$$p = -\frac{k}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - kgz + k\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{380}$$

Hierzu kommen die Grenzbedingungen an den Wandungen und an den beiden Öffnungen, sowie die Anfangsbedingung, für $t = 0$.

Allen diesen Bedingungen kann genügt werden, wenn man setzt:

$$\varphi = T \cdot \varphi', \tag{381}$$

wobei T eine Funktion der Zeit t allein, φ' aber der Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials für den speziellen oben behandelten Fall des stationären Ausflusses ist. Denn dann wird sowohl die Laplacesche Gleichung erfüllt, als auch die Grenzbedingungen an den festen Wänden.

In der Differentialgleichung (320) der Stromlinien hebt sich der Faktor T ganz heraus; daher verlaufen die Stromlinien jederzeit ebenso wie beim stationären Ausfluß. Was sich mit der Zeit ändert, ist nur die Strömungsgeschwindigkeit, und zwar folgt aus (381) unmittelbar durch Differentiation:

$$q = T \cdot q', \tag{382}$$

d. h. die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle ist proportional der stationären Geschwindigkeit an dieser Stelle und dem Zeitfaktor T.

Bezeichnen wir nun wieder die auf das obere Flüssigkeitsniveau bezüglichen Größen mit dem Index 0, während wir die auf die Ausflußöffnung bezüglichen Größen ohne unteren Index lassen, und vernachlässigen f gegen f_0, so ergibt sich aus (329), (380), (381) und (382):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q'^2}{2(\varphi_0' - \varphi')} \cdot (1 - T^2), \tag{383}$$

und durch Integration dieser Differentialgleichung, wenn wir zur Abkürzung die positive Konstante

$$\frac{q'^2}{\varphi_0' - \varphi'} = \alpha$$

setzen und bedenken, daß für $t = 0$ $T = 0$:

$$T = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}. \tag{384}$$

Hierdurch ist nach (382) die Ausströmungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit zu jeder beliebigen Zeit t gegeben. Sie wächst von 0 ab bis zu ihrem stationären Wert in (331), den sie genau genommen erst nach unendlich langer Zeit, mit gewisser Annäherung aber um so schneller erreicht, je größer er ist.

Drittes Kapitel. Wirbelbewegungen.

§ 73. Betrachten wir eine inkompressible Flüssigkeit, die einen einfach zusammenhängenden, allseitig von festen Wänden begrenzten, im übrigen beliebig großen Raum erfüllt, so wissen wir aus dem § 71, daß, falls keine Wirbel in ihr existieren, ihre Ge-

schwindigkeit überall und für immer Null ist. Nehmen wir nun aber an, daß irgendwo und irgendwann Wirbel vorhanden sind, d. h. daß in einem gewissen Zeitpunkt an gewissen Stellen der Flüssigkeit die Rotationsgeschwindigkeit einen von Null verschiedenen, gegebenen Wert besitzt, so läßt sich beweisen, daß dann die Geschwindigkeit der ganzen Flüssigkeit, innerhalb und außerhalb der Wirbel, sowohl für den betreffenden Zeitpunkt als auch für alle anderen Zeiten, eindeutig bestimmt ist.

Wir führen den Beweis zunächst für den betreffenden Zeitpunkt t, indem wir zeigen, daß durch die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit ξ, η, ζ in (59), zusammen mit der Bedingung der Inkompressibilität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{385}$$

die gleichzeitigen Werte der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w überall bestimmt sind. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es noch andere Werte der Geschwindigkeitskomponenten, etwa u', v', w', welche dieselben Bedingungen erfüllen. Dann würden die Differenzen $u' - u = u_0$, $v' - v = v_0$, $w' - w = w_0$, als Geschwindigkeitskomponenten aufgefaßt, eine Bewegung der Flüssigkeit in demselben einfach zusammenhängenden, allseitig von festen Wänden begrenzten Raume darstellen, die erstens der Inkompressibilitätsbedingung genügt und zweitens vollkommen wirbelfrei verläuft, da für sie ξ_0, η_0, ζ_0 überall verschwinden. Eine solche Bewegung ist aber nicht möglich; folglich sind u_0, v_0 und w_0 durchweg gleich Null.

Da nun die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w überall bestimmt sind, so sind sie es auch innerhalb der Wirbelfäden, und mit ihnen ihre räumlichen Differentialquotienten nach x, y, z, also auch die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit. Dadurch ist aber die Veränderung, die ein Wirbelfaden im Verlauf des Zeitelements dt erleidet, einschließlich seiner Drehung und seiner Deformation, vollkommen bestimmt; und da nach (317) das Produkt der Wirbelgeschwindigkeit ω in den Querschnitt des Fadens zeitlich konstant bleibt, so wird dadurch auch die im Zeitintervall dt eintretende Änderung der Wirbelgeschwindigkeit ω bestimmt, und man kennt mithin Größe und Richtung, also auch die Komponenten ξ, η, ζ der Rotationsgeschwindigkeit für die Zeit $t + dt$. Dies genügt aber, um für den Zeitpunkt $t + dt$ die nämlichen Überlegungen anzustellen, wie vorher für den Zeitpunkt t. So ent-

wickelt sich der Vorgang vollkommen eindeutig weiter, indem man von jedem Zeitpunkt auf einen unendlich benachbarten späteren Zeitpunkt schließt, und die Bewegung der ganzen Flüssigkeit erscheint für alle Zeiten bestimmt.

§ 74. Nach der im vorigen Paragraphen gemachten Feststellung wollen wir nun die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, welche bestimmten durch die Werte von ξ, η, ζ gegebenen Wirbeln entsprechen, wirklich berechnen, und nehmen hierfür an, daß die Flüssigkeit sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt. Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, drei stetige Funktionen u, v, w zu finden, welche erstens der Inkompressibilitätsbedingung (385), zweitens den drei Gleichungen (59) bei gegebenem ξ, η, ζ genügen.

Um zunächst die Bedingung (385) zu erfüllen, setzen wir:

$$(386) \quad u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

indem wir unter U, V, W drei gewisse neue, mit ihren ersten Differentialquotienten stetige Funktionen verstehen; hierdurch wird offenbar (385) identisch befriedigt. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, dürfen wir den Funktionen U, V, W von vornherein noch eine gewisse Beschränkung auferlegen. Denn es ist klar, daß, wenn man statt U schreibt: $U + \frac{\partial \psi}{\partial x}$, statt V: $V + \frac{\partial \psi}{\partial y}$, statt W: $W + \frac{\partial \psi}{\partial z}$, unter ψ eine ganz beliebige Funktion verstanden, die Gleichungen (386) genau die nämlichen Werte von u, v, w liefern wie vorher. Die Funktion ψ kann man also willkürlich festsetzen, ohne dadurch der Berechnung von u, v, w vorzugreifen. Wir wollen nun ψ so wählen, daß:

$$(387) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Das läßt sich, wie leicht zu sehen, durch passende Festsetzung des Wertes von $\Delta\psi$ stets erreichen.

Dies vorausgesetzt, substituieren wir die Ausdrücke (386) in die Gleichungen (59) und erhalten dann:

$$(388) \quad 2\xi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Delta U,$$

oder nach (387):

$$(389) \quad \Delta U = -2\xi, \quad \Delta V = -2\eta, \quad \Delta W = -2\zeta.$$

Das sind drei Poissonsche Differentialgleichungen (I. (132)), deren Integrale nach I. § 45 lauten:

$$U = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\xi' d\tau'}{r}, \quad V = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\eta' d\tau'}{r}, \quad W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\zeta' d\tau'}{r}. \tag{390}$$

Hier bedeutet r die Entfernung des Aufpunktes x, y, z von irgendeinem anderen Punkte x', y', z' der Flüssigkeit, in welchem die Wirbelgeschwindigkeit ξ', η', ζ' besteht. Die Integration ist über sämtliche Raumelemente $d\tau'$ der Flüssigkeit zu erstrecken, wobei man natürlich alle diejenigen Raumelemente weglassen kann, in denen die Wirbelgeschwindigkeit gleich Null ist. Für eine vollkommen wirbelfreie Flüssigkeit erhält man dann wieder das Resultat des § 71.

Daß die so bestimmten Funktionen U, V, W tatsächlich die Eigenschaft (387) besitzen, erkennt man direkt durch Substitution der Ausdrücke (390), indem man dieselben nach x, y, z differentiiert und die entstehenden Integrale nach (79) durch partielle Integration umformt. Hierbei sind die Identitäten:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x'}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y'}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z'} \tag{391}$$

zu benutzen, sowie die Beziehung (315).

Setzen wir nun die gefundenen Ausdrücke von U, V, W in (386) ein, so ergeben sich daraus die gesuchten Werte der Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Punkte x, y, z der Flüssigkeit, innerhalb oder außerhalb der Wirbel:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int \left(\zeta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\tau', \text{ usw.}, \tag{392}$$

oder:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int \left(\eta' \frac{z - z'}{r^3} - \zeta' \frac{y - y'}{r^3}\right) d\tau', \text{ usw.}, \tag{393}$$

oder, in vektorieller Schreibweise (I. § 87):

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{2\pi}\int \left[\mathfrak{v}', \frac{\mathfrak{r}}{r}\right] \frac{d\tau'}{r^2}. \tag{394}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{q}$ den Geschwindigkeitsvektor im Aufpunkt, r die Entfernung des Aufpunktes von irgendeinem Flüssigkeitselement $d\tau'$, in welchem die Wirbelgeschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ besteht, endlich $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ den Vektor von der Länge 1, der vom Flüssigkeitselement $d\tau'$ zum Aufpunkt gerichtet ist.

Am anschaulichsten macht man sich die Bedeutung der Gleichung (394) durch die Überlegung, daß nach ihr ein jedes Wirbelelement vom Volumen $d\tau'$ einen bestimmten Beitrag liefert zur Flüssigkeitsgeschwindigkeit q im Aufpunkt. Dieser Beitrag ist nach Größe und Richtung bestimmt durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi}\left[\mathfrak{o}', \frac{\mathfrak{r}}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2} = \delta\mathfrak{q}, \tag{395}$$

d. h. er ist proportional der Wirbelgeschwindigkeit, umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, ferner proportional dem sin des Winkels zwischen Wirbelachse und Verbindungslinie r, und steht rechtwinklig auf der durch diese beiden Richtungen gelegten Ebene. Die Richtungen $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{r}$, $\delta\mathfrak{q}$ bilden in der angegebenen Reihenfolge ein rechtshändiges Koordinatensystem, oder mit anderen Worten: die Bewegung $\delta\mathfrak{q}$ erfolgt im Sinne derjenigen Geschwindigkeitsrichtung, welche die dem Aufpunkt zunächst gelegenen Teilchen des Wirbelements besitzen, wenn sie um die ruhend gedachte Wirbelachse ihre Drehung ausführen.

Durch die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w als Funktionen von x, y, z sind auch die Differentialgleichungen der Stromlinien:

$$u : v : w = dx : dy : dz \tag{396}$$

gegeben, welche sich von den früheren Gleichungen (320) dadurch wesentlich unterscheiden, daß hier im allgemeinen kein Geschwindigkeitspotential existiert.

§ 75. Betrachten wir als Beispiel einen Wirbelfaden von der Form eines dünnen kreisförmigen Ringes. Die Rotationsgeschwindigkeit können wir so groß annehmen, daß das Produkt derselben mit dem Ringquerschnitt, oder das Moment des Wirbelfadens, eine endliche Größe besitzt. In der Umgebung des Ringes ist dann natürlich die Flüssigkeitsströmung überall wirbelfrei. Diejenigen Flüssigkeitsteilchen, die in der Ringebene liegen, strömen alle rechtwinklig zu dieser Ebene, und zwar die innerhalb des Ringes liegenden im Sinne der Drehbewegung der inneren Teilchen, die außerhalb des Ringes liegenden im Sinne der Drehbewegung der äußeren Teilchen des Wirbelringes. Die Stromlinien der wirbelfreien Flüssigkeit durchsetzen das Innere des Ringes in entsprechendem Sinne, biegen dann nach außen um, indem sie sich symmetrisch nach allen Seiten des unendlichen Raumes verbreiten, ganz ebenso wie bei einer „Doppelquelle“ (§ 64), und kehren, nachdem sie die Ringebene außerhalb des Ringes in entgegengesetzter Richtung

passiert haben, von der anderen Seite, sich wieder gegenseitig annähernd, zum Ringinnern zurück. Die Stromlinien umschließen also sämtlich den Wirbelfaden, im Sinne seiner Drehung. Dabei ist die Strömungsgeschwindigkeit überall stetig, innerhalb und außerhalb des Wirbels, auch beim Übergang von der wirbelnden zur wirbelfreien Flüssigkeit. Der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit ist im Innern des Ringes, wo die Stromfäden sich verengen, entsprechend größer als außerhalb, wo sie sich erweitern. Den geschlossenen Stromlinien entspricht ein vieldeutiges oder unstetiges Geschwindigkeitspotential und ein zweifach unendlich zusammenhängender Flüssigkeitsraum. In der Tat läßt sich eine solche Linie nicht innerhalb des wirbelfreien Raumes durch stetige Einengung auf einen einzigen Punkt zusammenziehen.

Der Wirbelring selber befindet sich aber nicht etwa in Ruhe, sondern er erteilt sich selber eine bestimmte Geschwindigkeit, und zwar, wie eine kurze Überlegung auf Grund des Gesetzes (395) ergibt, in der Richtung rechtwinklig zu seiner Ebene, und im Sinne der durch seine Mitte hindurchgehenden Stromlinien.

Nun seien zwei solche kreisförmige Wirbelringe in der Flüssigkeit vorhanden, etwa gleich groß, von gleichem Moment, und einander parallel, wobei die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte auf ihren Ebenen senkrecht stehen möge, als Symmetrieachse des ganzen Vorgangs. Dann ist leicht zu sehen, in welcher Weise sich der Vorgang abspielen wird. Zunächst bewegen sich beide Wirbelringe mit der ihnen eigentümlichen Translationsgeschwindigkeit in der Richtung der Symmetrieachse, im Sinne der durch sie hindurchgehenden Stromlinien. Doch werden sich außerdem Wechselwirkungen zwischen ihnen geltend machen. Da nämlich die Gleichung (394) unabhängig davon gilt, ob im Aufpunkt die Flüssigkeit wirbelt oder nicht, so werden die Wirbelelemente des einen Ringes von den durch den anderen Ring erzeugten Stromlinien sozusagen mitgenommen. Die Folge davon ist, daß der voranschreitende erste Ring sich nach außen erweitert, wobei seine Geschwindigkeit allmählich abnimmt, während der nachfolgende, zweite Ring sich verengt und immer schneller sich vorwärts bewegt, bis er schließlich den ersten Ring einholt und durch ihn hindurchgezogen wird. Ist dies geschehen, so kehrt sich der Prozeß um. Denn nun wird der zweite Ring sich wieder erweitern und an Geschwindigkeit abnehmen, der erste aber sich verengern, bis schließlich die Ringe wieder gleich groß und ihr Abstand derselbe geworden ist wie am

Anfang. Dann wiederholt sich dasselbe Spiel, mit Vertauschung der beiden Ringe, und geht so fort bis ins Unendliche.

§ 76. Rechnerisch noch etwas weiter verfolgen wollen wir, wie in § 66, den zweidimensionalen Fall, wo die Flüssigkeitsbewegung parallel der xy-Ebene erfolgt und nur von den Koordinaten x und y abhängt. Dann vereinfacht sich die Inkompressibilitätsbedingung (385) zu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Von den drei Rotationskomponenten in (59) verschwinden ξ und η, und es bleibt nur noch übrig:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{397}$$

so daß nach (389):

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\zeta, \tag{398}$$

und nach (386):

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{399}$$

Die Wirbellinien und Wirbelfäden sind also alle stets parallel der z-Achse, und da sie sich parallel der xy-Ebene bewegen, so bleibt die Länge jedes Wirbelfadens zeitlich konstant. Da aber die Masse eines Wirbelfadens und, wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit, auch das Volumen sich mit der Zeit nicht ändert, so folgt, daß auch der Querschnitt eines jeden Wirbelfadens, und mit ihm nach (314) auch seine Rotationsgeschwindigkeit ζ einen zeitlich unveränderlichen Wert besitzt.

Die Gleichung des Systems der Stromlinien ist nach (396) und (399):

$$W = \text{const.} \tag{400}$$

gültig sowohl innerhalb als auch außerhalb der Wirbel. Da die Stromlinien parallel der xy-Ebene verlaufen, so ist es für eine durch die vorstehenden Gleichungen dargestellte Bewegung gleichgültig, ob die Flüssigkeit sich längs der z-Achse nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, oder ob man sich dieselbe zwischen zwei beliebige, der xy-Ebene parallele feste Wände eingeschlossen denkt.

Die zweidimensionale Poissonsche Gleichung (398) wird (nach I. (139) und (140)) integriert durch das logarithmische Potential:

$$W_{xy} = -\frac{1}{\pi}\int \zeta' \cdot \log \varrho \cdot d\sigma'. \tag{401}$$

wobei $d\sigma'$ den Querschnitt eines unendlich dünnen Wirbelfadens, ζ' die dortige Wirbelgeschwindigkeit, ϱ die Entfernung vom Aufpunkt bedeutet, und das Integral über alle Wirbelfäden zu erstrecken ist. Daraus ergeben sich für die Geschwindigkeitskomponenten in irgendeinem, innerhalb oder außerhalb der Wirbel gelegenen, Punkt x, y nach (399) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\pi}\int \zeta' \cdot \frac{y-y'}{\varrho^2}\, d\sigma', \\ v &= \frac{1}{\pi}\int \zeta' \cdot \frac{x-x'}{\varrho^2}\, d\sigma', \end{aligned}\right\} \quad (401\,a)$$

welche besagen, daß jedes Wirbelelement $d\sigma'$ im Aufpunkt eine Geschwindigkeit erzeugt, die der Entfernung umgekehrt proportional und im Sinne der Drehung gerichtet ist.

Nehmen wir einmal einen einzigen unendlich dünnen Wirbelfaden an, etwa im Anfangspunkt der Koordinaten: dabei können wir die Rotationsgeschwindigkeit so groß voraussetzen, daß das Moment $\zeta' \cdot d\sigma' = \mu$ einen endlichen Wert besitzt. Dann schrumpft das Integral auf ein einziges Element zusammen und es wird:

$$W = -\frac{\mu}{\pi} \cdot \log \varrho\,. \quad (402)$$

Die Stromlinien sind also nach (400) konzentrische Kreise, und die Geschwindigkeitskomponenten in irgendeinem Punkt außerhalb des Wirbels nach (401a):

$$u = -\frac{\mu}{\pi}\frac{y}{\varrho^2}, \qquad v = \frac{\mu}{\pi}\frac{x}{\varrho^2}. \quad (403)$$

Das sind, abgesehen von einem konstanten Faktor, genau wieder die früheren Gleichungen (373). Der Unterschied ist nur, daß dort die in konzentrischen Kreisen wirbelfrei zirkulierende Flüssigkeit von einer indifferenten festen zylindrischen Wand begrenzt war, während hier ein ursächlicher Zusammenhang zwischen dem Moment des im Zentrum ruhenden Wirbelfadens und der äußeren Strömung besteht.

Für zwei derartige Wirbelfäden, in den Punkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, haben wir nach (401):

$$W = -\frac{\mu_1}{\pi}\log \varrho_1 - \frac{\mu_2}{\pi}\log \varrho_2 \quad (404)$$

mit den Geschwindigkeiten (399):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y-y_1}{\varrho_1^2} - \frac{\mu_2}{\pi}\frac{y-y_2}{\varrho_2^2}, \\ v &= \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x-x_1}{\varrho_1^2} + \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x-x_2}{\varrho_2^2}. \end{aligned}\right\} \quad (405)$$

Durch diese Gleichungen ist der Geschwindigkeitszustand der gesamten wirbelfreien Flüssigkeit auf die augenblickliche Lage der beiden Wirbelfäden zurückgeführt. Die Stromlinien sind: $W = \text{const.}$, das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = -\frac{\mu_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_1}{x-x_1} - \frac{\mu_2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_2}{x-x_2}, \tag{405a}$$

und, entsprechend der Vieldeutigkeit, der wirbelfreie Raum dreifach zusammenhängend.

Was nun die Bewegung der Wirbelfäden selber, also die Veränderungen der Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 mit der Zeit betrifft, so kann man dieselben ebenfalls aus (405) entnehmen; doch ist dabei zu beachten, daß ein Wirbelfaden sich selber keinerlei fortschreitende Geschwindigkeit erteilt, was sich natürlich auch rechnerisch ergibt, wenn man auf die in seinem Innern herrschenden Verhältnisse eingeht. Dann fällt in (405) das der Rückwirkung eines Wirbelfadens auf sich selbst entsprechende Glied fort, und wir erhalten:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\mu_2}{\pi}\frac{y_1-y_2}{\varrho_{12}^2}, \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\mu_2}{\pi}\frac{x_1-x_2}{\varrho_{12}^2}, \tag{406}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y_2-y_1}{\varrho_{12}^2}, \quad v_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{\mu_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{\varrho_{12}^2}. \tag{407}$$

Hieraus ergibt sich folgendes Bild der Bewegung der beiden Wirbelfäden: Da

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0,$$

so bleibt der Punkt mit den Koordinaten:

$$\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1+\mu_2} = x_0, \quad \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1+\mu_2} = y_0, \tag{408}$$

den man den „Schwerpunkt" der beiden Wirbelfäden nennen kann, dauernd in Ruhe.

Ferner ist:

$$u_1(x_1-x_2) + v_1(y_1-y_2) = 0,$$

und:

$$u_2(x_1-x_2) + v_2(y_1-y_2) = 0,$$

d. h. die Bewegung jedes der beiden Fäden erfolgt rechtwinklig zu ihrer Verbindungslinie. Daher bleibt ihre Entfernung, und ebenso die von ihrem Schwerpunkt, konstant. Die Fäden rotieren also mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit in konstantem Abstand ϱ_{12} um ihren Schwerpunkt. Sind die beiden Rotationen gleichsinnig, so liegt der Schwerpunkt zwischen den beiden Fäden; sind

sie entgegengesetzt, so liegt derselbe außerhalb, auf der Seite des größeren Moments. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{\pi\,\varrho_{12}^2},$$

sie erfolgt im Sinne des größeren der beiden Momente.

Sind die Momente einander gleich und entgegengesetzt, so rückt der „Schwerpunkt" ins Unendliche, die Winkelgeschwindigkeit der besprochenen Rotation wird Null, und die beiden Wirbelfäden führen nach (406) und (407) eine gemeinsame Translationsbewegung aus mit der Geschwindigkeit $\frac{\mu}{\pi\,\varrho_{12}}$ in der Richtung der zwischen ihnen hindurchgehenden Stromlinien, ebenso wie ein einziger Wirbelring (§ 75). In der Tat kann man zwei solche „antiparallele" Wirbelfäden als Bestandteile eines einzigen bis ins Unendliche verlängerten Wirbelringes auffassen. Die Lage der Stromlinien ergibt sich in diesem speziellen Fall nach (400) und (404) aus der Gleichung:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \text{const.} \tag{409}$$

Die Stromlinien sind also die zur Verbindungslinie der beiden Wirbelfäden symmetrisch gelegenen Kreise, welche ihren Abstand in harmonischem Verhältnis teilen.

§ 77. Schließlich betrachten wir noch ein einfaches Beispiel für den Fall eines Wirbelfadens mit endlichem Querschnitt, nämlich einen kreisförmigen Wirbelfaden vom Radius R und der überall gleichförmigen Rotationsgeschwindigkeit ζ, die, wie wir wissen, auch zeitlich konstant bleibt. Dann sind die Integrale mit den wirbelnden Elementen $d\sigma'$ über die ganze Kreisfläche zu erstrecken. Die Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten in irgendeinem Punkt der Flüssigkeit ergeben sich entweder durch Ausführung der Integration in (401a), oder auch, für uns bequemer, mittels Berechnung des logarithmischen Potentials W einer mit der gleichmäßigen Flächendichte $\frac{\zeta}{\pi}$ auf dem Kreise ausgebreiteten Masse, nach (401). Bezeichnen wir die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Kreises mit $\varrho_0 = \sqrt{x^2+y^2}$, so ist für einen inneren Punkt ($\varrho_0 < R$) nach I. (145):

$$W = \frac{\zeta}{2}\,(R^2 - \varrho_0^2) - \zeta R^2 \log R, \tag{410}$$

dagegen für einen äußeren Punkt ($\varrho_0 > R$) nach I. (146):

$$W = -\,\zeta R^2 \log \varrho_0. \tag{411}$$

Daher sind nach (400) die Stromlinien sowohl innerhalb als auch außerhalb des Wirbelzylinders die konzentrischen Kreise $\varrho_0 = \text{const.}$ Aber während außerhalb des Zylinders, im wirbelfreien Raume, die Geschwindigkeit nach (399) und (411) dargestellt wird durch:

$$u = -\zeta R^2 \frac{y}{\varrho_0^2}, \quad v = \zeta R^2 \frac{x}{\varrho_0^2}, \tag{412}$$

also wieder ganz übereinstimmend mit (403), ist sie im Innern nach (410) gegeben durch:

$$u = -\zeta y, \quad v = \zeta x. \tag{413}$$

Hier rotiert also die Flüssigkeit mit der Rotationsgeschwindigkeit ζ, ohne Deformation, wie ein starrer Körper. Vgl. (39). Bemerkenswert ist dabei, daß an der Oberfläche des Wirbelfadens, da, wo die wirbelnde an die wirbelfreie Flüssigkeit grenzt, die Geschwindigkeit sich durchaus stetig verhält, indem die Formeln (412) und (413) für $\varrho_0 = R$ ineinander übergehen. Für diesen Wert erreicht die Größe der Geschwindigkeit ein Maximum, im Betrage ζR, von dem sie nach beiden Seiten bis Null abfällt.

Der Druck p folgt im äußeren, wirbelfreien Flüssigkeitsraume nach (322) dem Gesetze:

$$p = -\frac{k}{2} \zeta^2 \frac{R^4}{\varrho_0^2} + \text{const.}, \tag{414}$$

dagegen im Innern des Wirbelfadens nach (297) dem anderen Gesetze:

$$p = \frac{k}{2} \zeta^2 \varrho_0^2 + \text{const.} \tag{415}$$

Da nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung der Druck an der Grenzfläche stetig ist, so ist seine Größe überall bestimmt, wenn sie in irgendeiner Entfernung, z. B. im Unendlichen, gegeben ist. Läßt man den Aufpunkt aus dem Unendlichen heranrücken, so nimmt der Druck ab mit Annäherung an den Wirbel, und von da weiter bis zu seiner Mitte, wo er am kleinsten ist.

Viertes Kapitel. Reibung.

§ 78. Die im Vorhergehenden dargelegten Anwendungen der hydrodynamischen Grundgleichungen haben uns gezeigt, daß diese Gleichungen, in der § 53 abgeleiteten Form, eine ansehnliche Zahl verschiedenartiger Flüssigkeitsbewegungen in guter Übereinstimmung mit der Wirklichkeit darzustellen vermögen. Doch gibt es

immerhin noch Klassen von hydrodynamischen Vorgängen in der Natur, deren Gesetze sich den Forderungen jener Differentialgleichungen nicht fügen; das ist uns am auffallendsten entgegengetreten in dem paradoxen Satze des § 65, wonach eine in einer ruhenden Flüssigkeit sich bewegende Kugel keinerlei Widerstand erleiden soll. Wenn wir für diesen wichtigen Fall den tatsächlichen Verhältnissen besser Rechnung tragen wollen, so müssen wir die Theorie passend erweitern. Es frägt sich, in welcher Weise.

Die Bewegungsgleichungen (83) und (84) im ersten Teil dieses Buches sind aus den Prinzipien der allgemeinen Mechanik abgeleitet, die wir hier nicht wohl ändern können; an diesen Gleichungen halten wir also fest. Dagegen bietet sich die Möglichkeit einer Modifikation der Theorie dar, wenn wir bedenken, daß wir zu unseren hydrodynamischen Differentialgleichungen (262) nur gelangten durch die Einführung der Hypothese der „vollkommenen Elastizität", d. h. der Hypothese, daß der Druck nur abhängt vom Deformationszustand (§ 21). Dann ergeben sich für eine Flüssigkeit die einfachen Werte (261a) der sechs Druckkomponenten. Wir wollen nun jetzt diese Hypothese dahin erweitern, daß der Druck in einem Körperelement außer vom Deformationszustand auch noch vom Geschwindigkeitszustand des Körperelements abhängen soll, d. h. von den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und ihren Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\cdots$. Demgemäß schreiben wir, die Gleichungen (261a) verallgemeinernd:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p + X_x', \quad Y_y = p + Y_y', \quad Z_z = p + Z_z', \\ Y_z &= Y_z', \qquad Z_x = Z_x', \qquad X_y = X_y', \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

$$p = f(k), \tag{417}$$

und nehmen an, daß die zusätzlichen Druckkomponenten $X_x', X_y', \cdots$ in gewisser Weise von den genannten Geschwindigkeitsgrößen abhängen. Nun ist klar, daß weder eine gleichmäßige Translationsgeschwindigkeit noch eine gleichmäßige Rotationsgeschwindigkeit des Körperelements irgendeinen Einfluß auf den Druck in ihm haben kann, sondern nur ein solcher Geschwindigkeitszustand, der mit einer Deformation verbunden ist. Daraus folgt, daß von den zwölf Geschwindigkeitsgrößen (256) nur die sechs Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit $x_x, x_y, \cdots$ in die Ausdrücke von $X_x', X_y', \cdots$ eingehen können, und zwar, wie wir annehmen wollen, linear, was bei hinreichend kleinen Deformationsgeschwindigkeiten sicher

zutrifft, und homogen, weil für verschwindende Deformationsgeschwindigkeit der durch sie erzeugte Druck jedenfalls auch verschwindet. Den durch den neu eingeführten Tensor dargestellten Druck nennen wir die „Reibung" der Flüssigkeit, und zwar speziell die „innere" Reibung oder „Zähigkeit" (Viskosität), im Gegensatz zur „äußeren" Reibung, welche sich bei der Gleitung der Flüssigkeit längs der Berührungsfläche mit einer anderen Substanz geltend macht, und die bei der Aufstellung der Grenzbedingungen zu berücksichtigen ist.

Sobald der Tensor der Reibung als lineare homogene Funktion des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit bekannt ist, folgen aus den allgemeinen Gleichungen (83) und (84) in Verbindung mit (416) und (417) die Bewegungsgesetze, nämlich:

$$(418)\quad \left\{\begin{aligned} \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z},\\ \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial Y_x'}{\partial x} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z},\\ \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)k &= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial Z_x'}{\partial x} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$(419)\qquad Y_z' = Z_y',\quad Z_x' = X_z',\quad X_y' = Y_x'.$$

Um nun noch die Art der Abhängigkeit der X_x', X_y', $\cdots$ von den x_x, x_y, $\cdots$ kennen zu lernen, besitzen wir kein einfacheres und zuverlässigeres Mittel als das, welches wir im § 23 zur Ableitung der elastischen Druckkomponenten in einem festen Körper benutzten: die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie, aber hier nicht als eines mechanischen Satzes, sondern als eines universellen physikalischen Prinzips. Denn die Reibung gehört nicht zu den konservativen Kräften (I. § 49), sondern bei jedem Vorgang, an dem Reibung beteiligt ist, verwandelt sich ein gewisser Betrag von mechanischer Energie in Wärme. Die während einer unendlich kleinen Zeit dt in einem unendlich kleinen Körperelement vom Volumen $d\tau$ durch Reibung erzeugte Wärme wird proportional sein den Größen dt und $d\tau$; wir setzen sie also gleich:

$$(420)\qquad W \cdot dt \cdot d\tau,$$

und haben dann W als eine endliche stets positive Größe zu betrachten.

Wenn wir nun genau ebenso verfahren wie früher in § 23, nur mit dem Unterschiede, daß wir statt der Energiegleichung (89) schreiben:

$$d(L+U)+\int W\cdot dt\cdot d\tau = A\,, \tag{421}$$

und daß wir statt der Bewegungsgleichungen (83) und (84) für einen elastischen festen Körper die Bewegungsgleichungen (418) und (419) für eine reibende Flüssigkeit benutzen, so gelangen wir schließlich, anstatt zu (95), zu der Beziehung:

$$\int W\cdot d\tau\cdot dt+\int(X_x'x_x+X_y'x_y+\cdots)d\tau\cdot dt=0\,. \tag{422}$$

In formaler Hinsicht ist dabei zu beachten, daß im § 23 die Bezeichnungen u, v, w, x_x, x_y, $\cdots$ sich auf die Lagen, hier aber, gemäß (256), auf die Geschwindigkeiten beziehen, und daß daher in der jetzigen Bezeichnung jene Zeichen alle mit dem Faktor dt zu multiplizieren sind, um dieselben Größen auszudrücken, welche wir früher durch die Differentiale du, dv, dw, dx_x, dx_y, $\cdots$ darstellten.

Da die Gleichung (422) für ein beliebig kleines Volumen gilt, so erhalten wir für jeden einzelnen Raumpunkt:

$$X_x'x_x+Y_y'y_y+Z_z'z_z+Y_z'y_z+Z_x'z_x+X_y'x_y=-W. \tag{423}$$

Nun sind, wie wir sahen, die Druckkomponenten homogene lineare Funktionen der Variabeln x_x, x_y, $\cdots$; folglich ist W eine homogene quadratische, und zwar stets positive, Funktion dieser Größen. Da aber weiter wegen der physikalischen Bedeutung von W und wegen der Isotropie der Flüssigkeit die Konstanten dieser Funktion nicht abhängen können von der Wahl des Koordinatensystems, so ist nach (117) die allgemeinste Form von W:

$$W=\varrho(x_x+y_y+z_z)^2+2\varkappa\left(x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{y_z^2+x_z^2+x_y^2}{2}\right), \tag{424}$$

wo ϱ und $\varkappa$ zwei positive, für die innere Reibung der Flüssigkeit charakteristische Konstante bedeuten.

Hieraus ergeben sich nun eindeutig die Ausdrücke für die Reibungskomponenten. Denn da die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit alle voneinander unabhängig sind, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen für die Komponenten des Reibungsdruckes:

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= -\varrho(x_x+y_y+z_z)-2\varkappa x_x\,,\ \cdots,\\ Y_z' &= -\varkappa y_z\,,\ \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{425}$$

und durch Substitution in (416) und in (418) das entsprechende Resultat für die Werte des Gesamtdruckes und für die Bewegungsgleichungen.

In diesen Formeln ist die Stokessche Theorie der Flüssigkeitsreibung enthalten.

Für inkompressible Flüssigkeiten, die wir in der Folge allein betrachten wollen, vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich dadurch, daß die Volumendilatationsgeschwindigkeit $x_x + y_y + z_z = 0$, und infolgedessen nach (416) und (425):

$$(426)\quad \begin{cases} X_x = p - 2\varkappa x_x, & Y_y = p - 2\varkappa y_y, & Z_z = p - 2\varkappa z_z, \\ Y_z = -\varkappa y_z, & Z_x = -\varkappa z_x, & X_y = -\varkappa x_y. \end{cases}$$

Die innere Reibung einer inkompressibeln Flüssigkeit hängt also nur von einer einzigen Konstanten $\varkappa$ ab.

Zur vollständigen Formulierung der Gesetze einer bestimmten mit Reibung verbundenen Flüssigkeitsbewegung gehört nun noch die Aufstellung der Grenzbedingungen.

Wenn die Flüssigkeit längs einer ruhenden festen Wand strömt, so bedarf es für den auf die Oberfläche wirkenden normalen Druck keiner besonderen Bedingung, weil der Widerstand der Wand jeden beliebigen Druck auszuhalten vermag. Für den tangentiell auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkenden Druck dagegen wird beim Vorhandensein von Reibung eine gewisse Beziehung gelten, in welcher die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit längs der Wand gleitet, eine Rolle spielt. Bezeichnet wieder ν die innere Normale der Flüssigkeitsoberfläche, und X_ν, Y_ν, Z_ν die Komponenten des von außen her auf ihr lastenden Druckes, so wird die tangentielle Komponente desselben, welche ja bei einer vollkommen elastischen Flüssigkeit völlig verschwindet, bei einer reibenden Flüssigkeit in die der Strömungsgeschwindigkeit gerade entgegengesetzte Richtung fallen, und ihre Größe wird am einfachsten jener Geschwindigkeit q proportional zu setzen sein, also:

$$(427)\quad X_\nu \cos(\tau x) + Y_\nu \cos(\tau y) + Z_\nu \cos(\tau z) = -\lambda \cdot q,$$

wenn τ die Richtung der Strömung bezeichnet, und λ eine gewisse positive, sowohl von der Substanz der Flüssigkeit als auch von der der Wand abhängige Konstante, den „Koeffizienten der äußeren Reibung".

In dieser Formulierung sind auch die extremen Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ inbegriffen. Für den ersten Fall verschwindet mit der äußeren Reibung auch der Tangentialdruck, für den zweiten ist, da der Tangentialdruck jedenfalls endlich bleibt, die Gleitungsgeschwindigkeit $q = 0$, d. h. die Flüssigkeit „haftet" an der festen Wand. Über den numerischen Wert der Koeffizienten der inneren

und der äußeren Reibung können im Rahmen der hier entwickelten Theorie nur die Messungen entscheiden.

§ 79. Betrachten wir zunächst als einfache Anwendung der aufgestellten Gleichungen die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch eine enge kreiszylindrische Röhre. Der Druck an den beiden Enden der Röhre sei gegeben, das Gewicht der Flüssigkeit werde vernachlässigt.

Wir machen die Achse der Röhre zur z-Achse und den Anfangsquerschnitt zur xy-Ebene; hier möge der Druck p_0 sein. Ist l die Länge der Röhre, also der Endquerschnitt $z = l$, und ist der Druck $p_l < p_0$, so strömt die Flüssigkeit in der Richtung der positiven z-Achse. Die Stromlinien werden parallel der z-Achse sein, also:

$$u = 0, \qquad v = 0. \tag{428}$$

Dann folgt aus der Bedingung des stationären Zustandes und aus der Inkompressibilitätsbedingung (385):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{429}$$

so daß sich für die Druckkomponenten aus (426) die folgenden Werte ergeben:

$$\left.\begin{aligned} X_x = p, \quad Y_y = p, \quad Z_z = p, \\ Y_z = -\varkappa \frac{\partial w}{\partial y}, \quad Z_x = -\varkappa \frac{\partial w}{\partial x}, \quad X_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{430}$$

Die Bewegungsgleichungen (83) lauten dann, indem alle drei Beschleunigungskomponenten verschwinden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \varkappa \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{431}$$

Da mithin p nur von z abhängt, während nach (429) w nur von x und y abhängt, so kann die letzte Beziehung nur bestehen, wenn

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -c, \tag{432}$$

wo c, das Druckgefälle, eine positive Konstante bedeutet, deren Wert sich sogleich daraus ergibt, daß für $z = 0$ und $z = l$ der Druck gegeben ist; nämlich:

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{\Delta p}{l}. \tag{433}$$

Um aus (432) w als Funktion von x und y zu finden, führen wir ebene Polarkoordinaten ϱ und φ ein (I. (159)) und bedenken, daß wegen der Symmetrie w nur von ϱ abhängt. Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{c}{\varkappa}. \tag{434}$$

Um diese Differentialgleichung allgemein zu integrieren, setzen wir:

$$\varrho \frac{dw}{d\varrho} = w'. \tag{435}$$

Dann ist:

$$\frac{dw'}{d\varrho} = \varrho \frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{dw}{d\varrho}$$

also wird nach (434):

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dw'}{d\varrho} = -\frac{c}{\varkappa}.$$

Integriert:

$$w' = -\frac{c}{\varkappa}\frac{\varrho^2}{2} + A,$$

und nach (435), durch nochmalige Integration:

$$w = -\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{\varrho^2}{4} + A\log\varrho + B. \tag{436}$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten dienen die Grenzbedingungen. Für $\varrho = 0$ ist w endlich, also

$$A = 0. \tag{437}$$

Für die Flüssigkeitsoberfläche sei $\varrho = R$ (Radius der Röhre). Dann ist in (427):

$$\cos(\tau x) = 0, \quad \cos(\tau y) = 0, \quad \cos(\tau z) = 1,$$

und, da ν mit $-\varrho$ zusammenfällt, nach (74) und (430)

$$Z_\nu = \varkappa\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{x}{\varrho} + \varkappa\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{y}{\varrho}.$$

Folglich nach (427) für $\varrho = R$:

$$\frac{\varkappa}{R}\left(x\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\lambda . w. \tag{438}$$

Hier ist nach (436) und (437) zu setzen:

$$w_R = -\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{R^2}{4} + B,$$

und:

$$\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R = \left(\varrho\frac{\partial w}{\partial \varrho}\right)_R = -\frac{c}{\varkappa}\cdot\frac{R^2}{2}.$$

Mithin lautet die Grenzbedingung (438):

$$B = \frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{R^2}{4} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R}{2},$$

und wir erhalten als Lösung der Aufgabe aus (436), mit den gefundenen Werten der Konstanten c und B, für die Strömungsgeschwindigkeit:

$$w = \frac{\Delta p}{4 \varkappa l} \cdot \left(R^2 - \varrho^2 + \frac{2\varkappa}{\lambda} R\right). \tag{439}$$

Die Geschwindigkeit nimmt also von der Mitte der Röhre gegen die Wandung hin ab, wie natürlich. Damit sie aber überall einen endlichen Wert besitzt, muß nicht nur $\varkappa$, sondern auch λ von Null verschieden sein, was auch leicht einzusehen ist.

Zur Prüfung der abgeleiteten Formel (439) dient am besten die Messung des in einer bestimmten Zeit t ausgeströmten Flüssigkeitsvolumens V. Dasselbe ergibt sich durch Integration über einen Querschnitt der Röhre als:

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} w \cdot t \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi,$$

also:

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\varkappa} \left(1 + \frac{4\varkappa}{\lambda R}\right) \cdot t. \tag{440}$$

Hiernach wird das Ausströmungsgesetz wesentlich beeinflußt durch das Verhältnis der inneren Reibungskonstante $\varkappa$ zur äußeren Reibungskonstante λ. Ist dies Verhältnis klein gegen den Röhrenradius R, so ist die Ausflußmenge proportional der vierten Potenz des Radius, und nur von der inneren Reibung abhängig. Ist es aber groß gegen R, so ist die Ausflußmenge proportional der dritten Potenz des Radius, und nur von der äußeren Reibung abhängig. In den Zwischenfällen ist das Gesetz verwickelter, indem die Einflüsse der beiden Reibungskoeffizienten sich superponieren.

Die Versuche von Poiseuille, welche in der Folge bestätigt worden sind, haben ergeben, daß in der Regel der erstgenannte Fall verwirklicht ist, daß also in der letzten Formel $\lambda = \infty$ gesetzt werden kann, oder:

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\varkappa} \cdot t. \tag{441}$$

Daraus folgt weiter nach (439), daß an der Röhrenwand, für $\varrho = R$, $w = 0$, oder daß die Flüssigkeit an der Substanz der Wand „haftet".

Das Poiseuillesche Gesetz (441) gilt aber erfahrungsgemäß nur für hinreichend enge Röhren. Wenn nämlich der Radius R der Röhre einen gewissen kritischen Wert überschreitet, verliert die ganze hier entwickelte Lösung des Problems ihre physikalische Bedeutung; schon der erste Ansatz (428) entspricht nicht der Wirklichkeit, da die Stromlinien tatsächlich nicht mehr parallel der Röhrenachse verlaufen, sondern durch Wirbelbildungen beeinflußt werden, — eine Erscheinung, die man als „Turbulenz" bezeichnet. Nach den neueren Forschungen steht das Auftreten der turbulenten Bewegungen nicht etwa in einem Widerspruch mit den hydrodynamischen Gleichungen, sondern dasselbe erklärt sich dadurch, daß die Gleichungen für die Strömung mehrere verschiedene Lösungen besitzen, von denen die hier entwickelte einfachste nur im Falle eines hinreichend engen Rohres die stabile, in der Natur verwirklichte Bewegung darstellt. Doch bereitet die exakte Theorie der Turbulenz der mathematischen Behandlung bedeutende Schwierigkeiten.

§ 80. Die entwickelte Theorie der Reibung gestattet uns auch, ein Problem, das wir bei früherer Gelegenheit (§ 65) als unlösbar erkannten, hier mit besserem Erfolge wieder aufzunehmen: die Berechnung des Widerstandes, den eine bewegte Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit erfährt. Wir fragen nach der Größe der gesamten Druckkraft, welche eine ruhende inkompressible Flüssigkeit auf eine in ihr mit der konstanten Geschwindigkeit a in einer bestimmten Richtung, der z-Achse, bewegte Kugel vom Radius R ausübt. Dabei wollen wir die Flüssigkeit auch als schwer, von der Dichtigkeit k, voraussetzen. Statt der bewegten Kugel in der ruhenden Flüssigkeit setzen wir wieder nach dem Relativitätsprinzip die ruhende Kugel, mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten, im gleichförmigen Flüssigkeitsstrom, d. h. in einer stationären Strömung, deren Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung von der Kugel ($r = \infty$)

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -a \tag{442}$$

ist.

Als andere Grenzbedingung benutzen wir die im vorigen Paragraphen gefundene, daß an der Oberfläche der Kugel, also für $r = R$, die Flüssigkeit an der Kugel haftet, d. h.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{443}$$

Als Differentialgleichungen zur Bestimmung von u, v, w und p als Funktionen von x, y, z dienen uns die Bewegungsgleichungen (83) mit den Werten (426) der Druckkomponenten, und die Inkompressibilitätsbedingung (385). Im allgemeinen sind die Bewegungsgleichungen nicht linear; denn für die Beschleunigung haben wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w, \quad \cdots. \tag{444}$$

Daher wollen wir die Aufgabe noch weiter vereinfachen durch die einschränkende Annahme, daß die Geschwindigkeiten u, v, w hinreichend klein sind, um die quadratischen Glieder auf der rechten Seite von (444) vernachlässigen zu können. Dann gehen die Gleichungen (83) über in:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \cdots,$$

oder, mit Substitution der Ausdrücke (426) für die Druckkomponenten und Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung (385):

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial p}{\partial x} + \varkappa \cdot \Delta u = 0, \quad \cdots, \tag{445}$$

und weiter, da die Strömung stationär ist, und $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varkappa \cdot \Delta u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varkappa \cdot \Delta v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -kg + \varkappa \cdot \Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

Aus diesen drei Gleichungen läßt sich p eliminieren, wodurch man erhält:

$$\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{447}$$

Nun zerfällt die ganze Aufgabe in zwei getrennte Teile: erstens die Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w aus (385) und (447), mit den Grenzbedingungen (442) und (443), zweitens die Bestimmung des Druckes p aus (446) und der aus den Druckkomponenten resultierenden Gesamtwirkung auf die Kugel.

Was zunächst die Geschwindigkeit betrifft, so ist wegen der Grenzbedingungen klar, daß dieselbe hier kein Potential haben kann.

Wir machen daher, im Anschluß an die Gleichungen des § 65, aber mit einiger Verallgemeinerung derselben, folgenden Ansatz:

$$(448)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right.$$

$$(449)\quad \varphi = a \cdot z + b \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \cdot \frac{\partial r}{\partial z},$$

wo u', v', w' drei neue Funktionen mit einfacheren Eigenschaften, a, b, c drei Konstante bedeuten. Dann ist die Grenzbedingung (442) erfüllt, falls nur u', v', w' im Unendlichen verschwinden. Die Inkompressibilitätsbedingung (385) verlangt, daß:

$$(450)\quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \Delta \varphi.$$

Bedenkt man nun, daß nach (449):

$$\Delta \varphi = c \cdot \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = c \cdot \frac{\partial (\Delta r)}{\partial z},$$

und daß

$$(451)\quad \Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r},$$

so geht (450) über in:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 2c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Um diese Gleichung zu befriedigen, setzen wir:

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = \frac{2c}{r},$$

und erhalten so aus (448):

$$(452)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{2c}{r}. \end{aligned}\right.$$

Mit diesen Ausdrücken lassen sich auch alle übrigen Bedingungen erfüllen. Zunächst erkennt man leicht, daß die Gleichungen (447)

identisch befriedigt werden. Es bleiben noch die Grenzbedingungen (443), welche für $r = R$ ergeben:

$$0 = b\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} + c\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} = \frac{3bxz}{R^5} - \frac{cxz}{R^3},$$

$$0 = b\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z} + c\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z} = \frac{3byz}{R^5} - \frac{cyz}{R^3},$$

$$0 = -a - b\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} - c\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{2c}{R}$$

$$= -a - b\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) + c\left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{1}{R}\right).$$

Daraus folgt:

$$b = \frac{aR^3}{4}, \quad c = \frac{3}{4}Ra, \tag{453}$$

wodurch nun u, v, w vollkommen bestimmt sind.

Der zweite Teil der Aufgabe betrifft die Berechnung des Druckes. Hierfür ergeben die Gleichungen (446), mit Berücksichtigung der gefundenen Werte von u, v, w, durch Integration:

$$p = -kgz - \varkappa \cdot \Delta\varphi + p_0,$$

wenn p_0 den Druck des von der Kugel unbeeinflußten Flüssigkeitsstromes in der Ebene $z = 0$ bedeutet, und daraus durch Einsetzen des Ausdrucks (449) von φ:

$$p = -kgz + 2\varkappa c \cdot \frac{z}{r^3} + p_0. \tag{454}$$

Die gesamte Druckkraft, welche die strömende Flüssigkeit auf die ruhende Kugel ausübt, ist die Resultierende aller auf die Oberflächenelemente $d\sigma$ der Kugel mit der inneren Normalen $\nu = -r$ wirkenden Druckkräfte; also, da sie sich jedenfalls auf ihre z-Komponente reduziert, nach (74):

$$\int Z_\nu\, d\sigma = \int \left(Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z)\right) d\sigma, \tag{455}$$

wo nun die Werte der Druckkomponenten aus (426) einzusetzen sind; sodann ist über die ganze Kugeloberfläche zu integrieren, am besten mit Einführung von Polarkoordinaten: $d\sigma = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Die direkte Rechnung gestaltet sich etwas umständlich; man kann sie sich wesentlich erleichtern durch folgende Überlegung:

Nach (83) ist für unseren Fall im ganzen Innern der Flüssigkeit:

$$k\varrho + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

Denn die Beschleunigung $\frac{d^2z}{dt^2}$ verschwindet hier, wie wir oben an der Hand der Gleichungen (444) sahen.

Integriert man nun diese Gleichung über den Zwischenraum zwischen der Oberfläche der festen Kugel und irgendeiner konzentrischen Kugelfläche mit einem Radius $r > R$, und benutzt dabei die Relation (78), so ergibt sich, daß das Integral (455), erstreckt über die Kugelfläche mit dem Radius R, gleich ist demselben Integral, erstreckt über die Kugelfläche mit dem Radius r, zuzüglich des Gliedes:

(456) $$-k\varrho(V_r - V_R),$$

wenn V_r und V_R die Volumina der beiden Kugeln bedeuten. Da nun die Wahl von r ganz beliebig ist, nehmen wir r unendlich groß und erzielen dadurch eine wesentliche Vereinfachung unserer Ausdrücke.

Zunächst ist für $r = \infty$, nach (452) und (449):

$$z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{6cxz^2}{r^5},$$

$$z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{6cyz^2}{r^5},$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{cz}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right),$$

folglich nach (426), mit Berücksichtigung von (454):

$$Z_x = \frac{6\varkappa cxz^2}{r^5}, \qquad Z_y = \frac{6\varkappa cyz^2}{r^5},$$

$$Z_z = p_0 - k\varrho z + \frac{6\varkappa cz^3}{r^5}.$$

Setzt man diese Werte in (455) ein und integriert über alle Elemente $d\sigma = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ der Kugelfläche r mit der inneren Normalen $\nu = -r$, so erhält man den Ausdruck:

$$-8\pi\varkappa c + k\varrho \cdot V_r,$$

und hierzu (456) addiert ergibt für die gesuchte Druckkraft auf die Kugel den Wert:

$$k\varrho V_R - 8\pi\varkappa c,$$

oder nach (453):

(457) $$k\varrho V_R - 6\pi\varkappa Ra.$$

Das erste Glied entspricht dem durch das Gewicht der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit G bedingten Auftrieb (I. § 114), das zweite dem Reibungswiderstand. Derselbe wirkt natürlich im Sinne des Flüssigkeitsstromes (442).

Betrachtet man die Kugel als frei beweglich und schwer, vom Gewicht G_0, und fragt nach der Kraft F, welche man auf sie wirken lassen muß, damit sie in Ruhe bleibt, so ergibt sich für die Größe von F, positiv nach oben gerechnet:

$$F = G_0 - G + 6\pi\varkappa R a. \tag{458}$$

Dies ist also auch zugleich die Kraft, welche man auf die Kugel in der Richtung nach oben ausüben muß, damit sie sich in der ruhenden Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit $+ a$ bewegt. Umgekehrt liefert diese Stokessche Formel die Größe a der stationären Geschwindigkeit, mit der sich die Kugel durch die Flüssigkeit hindurch bewegt, wenn eine konstante Kraft F auf sie wirkt. Fällt z. B. die Kugel nur durch ihre Schwere, so ist die Geschwindigkeit:

$$a = -\frac{G_0 - G}{6\pi\varkappa R}, \tag{459}$$

also umgekehrt proportional dem Radius der Kugel.

Verzeichnis der Definitionen und der wichtigsten Sätze.

	Seite
Abplattung der Erde	132
Adiabatische Vorgänge	128
Argument einer Funktion	71
Atmosphärendruck	127
Ausfluß einer Flüssigkeit	145
Barometer	127
Deformationsgeschwindigkeit	120
Dilatation	9
Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen	11
Divergenz	25
Doppelquelle	149
Dopplersches Prinzip	115
Druck	26
Druckgefälle	33
Ebene Wellen	103
Einfach zusammenhängender Raum	163
Elastisches Potential	44
Elastizität, vollkommene	38
Elastizitätsmodul, kubischer	57
Elastizitätsmodul, lineärer	59
Erzwungene Schwingungen	96
Eulersche Gleichungen	123
Flächenkräfte	26
Fortpflanzungsgeschwindigkeit	72
Fortschreitende Welle	87
Fouriersche Reihe	80
Freie Oberfläche	126
Freier Strahl	159
Funktionaldeterminante	5, 21
Gaußsche Gleichung	149
Geschwindigkeitspotential	102, 140
Grundschwingung	86
Harmonische Obertöne	90
Hauptdilatationen	12
Hauptdrucke	35
Heber	127
Homogene Veränderung	10
Hydraulische Luftpumpe	144
Hydrodynamik	121
Hydrodynamischer Druck	142
Intervalle, musikalische	90
Isotropie	39
Klangfarbe	89
Kommunizierende Röhren	127
Konforme Abbildung	157
Konsonanz	90, 107
Kontinuitätsgleichung	120
Kristallsysteme	49
Kubische Kompression	56
Kugelwellen	108
Lagrangesche Gleichungen	123
Lineäre Elastizität	57
Lineäre Veränderung	4
Lokale Betrachtungsweise	118
Longitudinalschwingungen	69
Manometer	127
Mehrfach zusammenhängender Raum	164
Moment einer Doppelquelle	149
Moment eines Wirbelfadens	139
Natürliches Tonsystem	92
Normaldruck	30
Normalton	91
Partialschwingungen	85
Partialton	89
Pfeife	103

	Seite
Poiseuillesches Gesetz	185
Pulsierende Kugel	108
Pythagoräisches Komma	93
Pythagoräisches Tonsystem	92
Quellpunkt	147
Rechtsschraube	64
Reflexion	78
Reguläre Kristalle	53
Reibung	180, 182
Resonanz	98
Rhombische Kristalle	52
Rotation (als Vektoroperation)	24
Saite	67
Schallgeschwindigkeit	129
Scherung	18
Schubspannung	30
Schwebungen	106
Schwingungsbauch	88
Schwingungsknoten	88
Schwingungsphase	86
Selektive Wirkung	98
Senkpunkt	147
Stehende Welle	88
Stokessche Formel	191
Stromfaden	140
Stromintensität	143
Stromlinie	140
Substanzielle Betrachtungsweise	118
Symmetrieachse	51
Syntonisches Komma	92
Tangentialdruck	30
Temperiertes Tonsystem	93
Tensor	25
Tonhöhe	89
Toricellisches Theorem	144
Torsion	59
Torsionsmodul	62
Transversalschwingungen	69
Verschiebungspotential	102
Volumendilatation	9
Wellenbewegung	72
Wellenebene	103
Wellengleichung, räumliche	103
Wellenlänge	86
Wellennormale	103
Wirbelfaden	137
Wirbellinie	136
Wirbelring	172